Interrogation du 13/11/2007

corrigé

Exercice I

1. Notons l_n la longueur du coté de l'un des triangles apparaissant à l'itération n. Le triangle étant équilatéral, sa hauteur a pour longueur

$$l_n \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} l_n$$

Il vient que l'aire du triangle est

$$\frac{1}{2} \times l_n \times \frac{\sqrt{3}}{2} l_n$$

donc

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{4} l_n^2$$

ce qui équivaut à

$$l_n = 2\sqrt{\frac{u_n}{\sqrt{3}}}$$

Par construction, les triangles construits à l'ítération suivante ont un coté dont la longueur est

$$l_{n+1} = \frac{1}{3} l_n$$

on a donc

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} l_{n+1}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{9} l_n^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{9} 4 \frac{u_n}{\sqrt{3}} = \frac{1}{9} u_n$$

ce qu'il faillait démontrer. Par ailleurs

Chaque triangle ajouté à l'étape $n-1$ remplace un segment du bord par 4 segments. Ainsi à l'étape n le nombre de triangles ajoutés sera 4 fois le nombre de triangles ajouté à l'étape $n-1$. On a donc

$$v_{n+1} = 4 v_n$$

2. L'aire du domaine qui a été ajouté à l'itération n est égale au nombre triangles ajoutés v_n multiplié par l'aire des domaines délimités par ces triangles. Ainsi

$$w_n = v_n u_n$$

Pour $n \geq 1$, on a

$$w_{n+1} = v_{n+1} u_{n+1} = 4 v_n \frac{1}{9} u_n = \frac{4}{9} w_n$$

Ainsi $(w_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme w_1. Il vient

$$w_n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} w_1$$

3. Si l'aire de D_0 est 1 alors l'aire des domaines des trois triangles ajoutés pour construire D_1 est $\frac{1}{9}$, en vertu de la question 1. Comme on ajoute 3 triangles, l'aire de $D_1 \setminus D_0$ est $\frac{1}{3}$. Il vient

$$w_1 = \frac{1}{3}$$

4. L'aire du Flocon de von Koch est la somme de l'aire du triangle initiale $u_0 = 1$ et de l'aire des domaines ajoutés à chaque itération. Si $N \in \mathbb{N}^*$, l'aire de D_N est donc

$$1 + \sum_{n=1}^{N} w_n$$

c'est-à-dire

$$1 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} w_1$$

c'est-à-dire

$$1 + w_1 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

c'est-à-dire

$$1 + w_1 \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{n}$$

ainsi l'aire du Flocon de von Koch est

$$1 + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n}$$

5. La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n}$$

est géométrique. Soit $q = \frac{4}{9}$. Comme $|q| < 1$, la série converge vers

$$\frac{1}{1-q}$$

On en déduit que l'aire du Flocon de von Koch est

$$1 + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{1}{3} \frac{9}{5} = \frac{8}{5}$$

6. Soit p_n le périmête du flocon à la n-ième itération. Par construction, on a

$$p_{n+1} = \frac{4}{3} p_n$$

Le terme général de cette suite géomtétrique est

$$p_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n} p_0$$

ce qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ ainsi le périmètre du Flocon de von Koch n'est pas borné. Ce flocon est un domaine d'aire finie et de périmètre infini.

Exercice II

Soit

$$u_n = \frac{n^2+1}{2^n}$$

Cette suite est à termes strictement positifs, le critère de d'Alembert peut donc être appliqué

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

ainsi

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$$

donc la série est convergente

Exercice III

Voir cours.