Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Interrogation du 26/10/2006

Corrigé

Exercice I

Remarquons que

$$u_n = n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) = 2\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}}$$

On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

or $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} = 1$$

par suite $\lim u_n = 2$.

Exercice II

Soit $A\in\mathbb{R}$. Si $A < \sqrt{5}$ alors posons $N = 0$ et remarquons que $\sqrt{2n^2+5} \geq \sqrt{5} \geq A$ est toujours vrai. Sinon $A \geq \sqrt{5}$, posons alors

$$N = \mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{A^2-5}{2}}\right) + 1$$

alors,

$$\begin{array}{lll}
n \geq N & \Rightarrow & n \geq \sqrt{\frac{A^2-5}{2}} \quad \text{donc} \\
n \geq N & \Rightarrow & n^2 \geq \frac{A^2-5}{2} \quad \text{donc} \\
n \geq N & \Rightarrow & 2n^2 \geq A^2 - 5 \quad \text{donc} \\
n \geq N & \Rightarrow & 2n^2 + 5 \geq A^2 \quad \text{donc} \\
n \geq N & \Rightarrow & \sqrt{2n^2+5} \geq A
\end{array}$$

Cela établit que

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \sqrt{2n^2+5} \geq A$$

donc $\lim\sqrt{2n^2+5} = +\infty$.

Exercice III

Notons l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier n, nous avons

$$|v_n - l^2| = |u_n^2 - l^2| = |u_n - l|\,|u_n + l| \tag{2}$$

Par ailleurs, la définition de la limite donne

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon' \tag{3}$$

Lorsque $\varepsilon' = 1$, cela entraine l'existence d'un entier N_1 tel que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < 1$$

ainsi lorsque $n \geq N_1$, nous avons $-1 < u_n - l < 1$ et donc $2l - 1 < u_n + l < 2l + 1$. Notons $M = \max\{|2l+1|, |2l-1|\}$, nous avons alors

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n + l| < M$$

Nous remarquons que $M > 0$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. En vertu de (3) lorsque $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Soit alors $N = \max\{N_1, N_2\}$, on a $n \geq N_1$ donc $|u_n + l| < M$ et $n \geq N_2$ donc $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{M}$, par suite

$$|u_n + l||u_n - l| < M\frac{\varepsilon}{M}$$

L'équation (2) entraine

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - l^2| < \varepsilon$$

si bien que l'on a établit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |v_n - l^2| < \varepsilon$$

c'est-à-dire la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l^2.

Exercice IV

1. Montrons que $E = \mathbb{Z}$ vérifie (1). Posons $d = 1$. Soit $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ avec $y \neq x$. On a $x - y \in \mathbb{Z}$ donc $|x - y| \in \mathbb{N}$, or $y \neq x$ donc $|x - y| \neq 0$. Ainsi $|y - x| \in \mathbb{N}^*$ donc $|y - x| \geq d$.

2. Soit $E = \mathbb{R}$ alors

$$\forall d > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{x\},\ |y - x| > d$$

puisqu'il suffit de prendre $y = x + \frac{d}{2}$. Ainsi (1) n'est pas vérifié.

3. La suite (u_n) est convergente, donc elle est de Cauchy, ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

en particulier pour $\varepsilon = d$, il existe un rang N à tel que $|u_{N+1} - u_N| < d$. Or $u_N \in E$ et $u_{N+1} \in E$.

Si $u_N \neq u_{N+1}$, en appliquant (1) on a $|u_n - u_{N+1}| > d$ ce qui est en contradiction avec $|u_{N+1} - u_N| < d$. Ainsi $u_{N+1} = u_N$. Par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang N.