

Interrogation du 26/10/2006

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (5 points)

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = n \left(e^{2/n} - 1 \right)$$

Exercice II (5 points)

En utilisant la définition de la limite, démontrer que

$$\lim \sqrt{2n^2 + 5} = +\infty$$

Exercice III (5 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$v_n = u_n^2$$

En utilisant la définition de la limite, montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice IV (5 points)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide, considérons l'assertion

$$\exists d > 0, \forall x \in E, \forall y \in E \setminus \{x\}, |x - y| \geq d \tag{1}$$

1. Donner un exemple d'ensemble infini vérifiant (1)
2. Donner un exemple d'ensemble non-vidé ne vérifiant pas (1).
3. Soit E un ensemble quelconque, non vide, vérifiant (1) et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments à valeurs dans E . Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.