Examen du 31/01/2007

Corrigé

Exercice I

1. La suite (u_n) n'est pas géométrique puisque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n\sin(n+1)}{(n+1)\sin n}$$

n'est pas une constante.

2. Soit (P_n) la proposition $u_n = \frac{\sin n}{n}$. On a

- (P_1) est vraie puisque $\frac{\sin 1}{1} = 1$.
- On a

$$(P_n) \Longrightarrow u_n = \frac{\sin n}{n} \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{\sin(n+1)}{n+1}\frac{\frac{\sin n}{n}}{\frac{\sin n}{n}} \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{\sin(n+1)}{n+1} \Longrightarrow (P_{n+1})$$

donc l'héridité est vérifiée.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre π est irrationnel donc pour tout entier relatif non nul k on a $\pi \neq \frac{n}{k}$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ n \neq k\pi$$

donc $\sin n \neq 0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$$

alors

$$n \geq N \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

donc

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

or $|\sin n| \leq 1$ donc

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{|\sin n|}{n} < \varepsilon$$

ainsi

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n| < \varepsilon$$

ce qui établit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$$

il en résulte que $\lim u_n = 0$.

5. Par construction de A, la suite (u_n) est une suite d'éléments de A. En vertu de la question précédente, elle converge vers 0. Or la question 3 entraine que $0 \notin A$. Ainsi (u_n) est une suite convergente d'élements de A qui ne converge pas dans A. Par suite, A n'est pas un fermé.

6. Soit $a_n = \sin n$ et $b_n = \frac{1}{n}$ on a $u_n = a_n b_n$ et

i) La suite (b_n) est positive

ii) La suite (b_n) converge vers 0

iii) La suite (b_n) est décroissante

Pour appliquer le théorème d'Abel et ainsi démontrer la convergence de la série, démontrons que

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq M \tag{1}$$

Pour établir (1), calculons la somme des N premieres termes de (a_n) pour $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \sin n &= \sum_{i=0}^{N} \operatorname{Im}\left(e^{in}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{i=0}^{N} (e^i)^n\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^i}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{N+1}{2}\left(e^{-i\frac{N+1}{2}}-e^{i\frac{N+1}{2}}\right)}}{e^{-\frac{i}{2}}\left(e^{\frac{i}{2}}-e^{\frac{i}{2}}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{N+1}{2}}\left(e^{-i\frac{N+1}{2}}-e^{i\frac{N+1}{2}}\right)}{e^{-\frac{i}{2}}\left(e^{\frac{i}{2}}-e^{\frac{i}{2}}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{N}{2}}\frac{\frac{\left(e^{-i\frac{N+1}{2}}-e^{i\frac{N+1}{2}}\right)}{2i}}{\frac{\left(e^{-\frac{i}{2}}-e^{\frac{i}{2}}\right)}{2i}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{N}{2}}\frac{\sin\frac{N+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{N+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{N}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{N+1}{2}\sin\frac{N}{2}}{\sin\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Soit p et q deux entiers naturels. Les cas $q < p$ et $p = 0$ étant triviaux, on peut supposer $q \geq p > 0$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| &= \left|\sum_{n=0}^{q} a_n - \sum_{n=0}^{p-1} a_n\right| \\
&= \left|\frac{\sin\frac{q+1}{2}\sin\frac{q}{2}}{\sin\frac{1}{2}} - \frac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right| \\
&= \frac{\left|\sin\frac{q+1}{2}\right|\left|\sin\frac{q}{2}\right| + \left|\sin\frac{p}{2}\right|\left|\sin\frac{p-1}{2}\right|}{\sin\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{2}{\sin\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

En posant $M = \frac{2}{\sin\frac{1}{2}}$, la proposition (1) est vérifiée. Il en rśulte la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

7. On a

$$0 \leq u_n^2 = \frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente puisque c'est une série de Riemann avec $s = 2 > 1$. En vertu du critère de comparaison, on a la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^2$$

8. Si p est un entier supérieur ou égal à 2, on procède de manière analogue à la question précédente pour montrer la convergence absolue de la série, en effet $p \geq 2 > 1$ donne la converge de la série de Riemann avec laquelle la série est comparée. La convergence absolue entrainant la convergence, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^p$$

converge.

Si $p = 1$, la question 6 permet de conclure que la série converge.

Si $p = 0$ alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{n=1}^{N} (u_n)^0 = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$$

et $\lim_{N \to +\infty} = +\infty$. La série est donc divergente dans ce cas.

On a démontrer que si $p \in \mathbb{N}$ alors il y a équivalence entre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^p$$

converge et $p \neq 0$.

Exercice II

1. L'ensemble A est la réunion de deux intervalles ouverts, c'est donc un ouvert. En revanche ce n'est pas un fermé puisque

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty; -1] \cup \{1\}$$

n'est pas un ouvert, puisqu'il n'est pas voisinage de 1 qui est l'un de ses points.

2. Comme A est un ouvert on a

$$\mathring{A} = A$$

En outre, $[-1, +\infty[$ est un fermé et c'est le plus petit fermé contenant A (puisque $]-1, +\infty[$ et $[-1, 1[\cup]1, +\infty[$ ne sont pas des fermés) ainsi

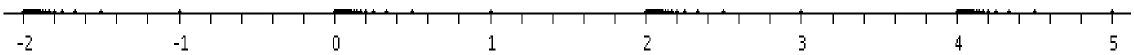
$$\overline{A} = [-1, +\infty[$$

Enfin

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{-1; 1\}$$

Exercice III

1. L'ensemble E est représenté ci-dessous



2. Commençons par montrer que
$$E \cap]1,2] = \emptyset$$
Pour tout entier naturel non nul n on a
$$\frac{1}{n} \in]0,1]$$
ainsi pour $m \in \mathbb{N}$ on a
$$2m + \frac{1}{2} \in]2m, 2m+1]$$
Il en résulte que
$$\forall m \in \mathbb{Z},\ E \cap]2m+1, 2m+2] = \emptyset$$
en particulier pour $m = 0$ on a $E \cap]1,2] = \emptyset$.

Soit $\varepsilon > 0$ alors
$$]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\not\subset E$$
en effet

- Si $\varepsilon < 1$ alors $1 + \frac{\varepsilon}{2} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ et $1 + \frac{\varepsilon}{2} \notin E$
- Si $\varepsilon \geq 1$ alors $\frac{3}{2} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ et $\frac{3}{2} \notin E$

Donc E n'est pas voisinage de 1 qui est l'un de ses points. Ainsi E n'est pas un ouvert.

3. Considérons la suite $(u_n)_{n \in N^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$$
Cette suite prend ses valeurs dans E et converge vers 0. Or m et n sont des entiers donc $mn \neq -\frac{1}{2}$ ainsi
$$2m + \frac{1}{n} \neq 0$$
donc $0 \notin E$. Il en résulte que (u_n) est une suite convergente d'élements de E qui ne congerve pas dans E. Par suite E n'est pas un fermé.

4. Soit $x = 1$ et $y = 2$. En vertu de la question 2, il n'y a aucun élément de E entre 1 et 2. Donc E n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.