

Examen du 31/01/2007

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Les résultats d'une question peuvent être admis pour passer à la question suivante. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées sauf pour la question 1 de l'exercice III.

Exercice I (12 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 = \sin 1 \\ u_{n+1} = \frac{n \sin(n+1)}{(n+1) \sin n} u_n, \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle géométrique ? Si oui, précisez sa raison.
2. Démontrer, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin n}{n}$$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin n \neq 0$.
4. En utilisant la définition de la limite, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
5. L'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est-il un fermé ?
6. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est-elle convergente ?
7. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^2$ est-elle convergente ?
8. Soit $p \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^p$$

est-elle convergente ? Discutez selon p , si nécessaire.

Exercice II (3 points)

Soit $A =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

1. L'ensemble A est-il ouvert ? Est-il fermé ?
2. Déterminer $\overset{\circ}{A}$, \bar{A} et ∂A .

Exercice III (5 points)

Considérons l'ensemble

$$E = \left\{ 2m + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Donner une représentation graphique de E .
2. Montrer que E n'est pas un ouvert.
3. L'ensemble E est-il fermé ?
4. L'ensemble E est-il dense dans \mathbb{R} ?