Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Devoir 3

Corrigé

Exercice I

1. On a $E_b \subset \mathbb{Q}$ et $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau. Il suffit donc de vérifier que

i) $(E_b, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$

ii) E_b est stable par la loi $\times$

iii) $1 \in E_b$

Vérifions le premier point : Réalisons le test du sous-groupe.

- L'ensemble E_b est non vide puisqu'il contient $0 = \frac{0}{b^0}$.
- Soit x et x' dans E, alors

$$\exists (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad x = \frac{m}{b^n}$$

$$\exists (m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad x' = \frac{m'}{b^{n'}}$$

On a

$$x - x' = \frac{m}{b^n} - \frac{m'}{b^{n'}} = \frac{mb^{n'} - m'b^n}{b^{n+n'}}$$

or $mb^{n'} - m'b^n \in \mathbb{Z}$ et $n + n' \in \mathbb{N}$, ainsi $x - x' \in E_b$.

Cela établit que $(E_b, +)$ est un groupe.

Vérifions le deuxième point : Soit x et x' dans E_b, alors

$$\exists (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad x = \frac{m}{b^n}$$

$$\exists (m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad x' = \frac{m'}{b^{n'}}$$

On a

$$x \times x' = \frac{m}{b^n} \times \frac{m'}{b^{n'}} = \frac{mm'}{b^{n+n'}}$$

or $mm' \in \mathbb{Z}$ et $n + n' \in \mathbb{N}$, ainsi $x \times x' \in E_b$.

Vérifions le troisième point : On a $1 = \frac{1}{b^0} \in E_b$.

Conclusion : $(E_b, +, \times)$ est un anneau.

2. Soit $x = \frac{1}{2}$ et $x' = \frac{1}{3}$. On a $x \in E_2 \subset E$ et $x' \in E_3 \subset E$. Mais

$$x + x' = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Supposons $\frac{5}{6} \in E$ alors il existe $(m, n, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times P$ tel que $\frac{5}{6} = \frac{m}{b^n}$ alors

$$b^n = \frac{6m}{5}$$

Comme $b^n \in \mathbb{N}$, il est nécessaire que n soit un multiple de 5, c'est-à-dire qu'il existe en entier k tel que $m = 5k$, ce qui équivaut à

$$6k = b^n$$

il est nécessaire que 6 divise b^n, il est alors nécessaire que 6 divise b, c'est-à-dire que 2 et 3 divisent b, mais alors b n'est pas premier, ce qui est contradictoire avec $b \in P$. Ainsi $x + x' \notin E$. Par suite E n'est pas stable par l'addition, ainsi $(E, +)$ n'est pas un groupe, donc $(E, +, \times)$ n'est pas un anneau.

3. On a $E \subset \mathbb{Q}$ puisque les éléments de E sont des quotients d'entiers. En revanche, on ne peut pas avoir $E = \mathbb{Q}$ puisque $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau alors que $(E, +, \times)$ n'en est pas un.

Exercice II

1. Soit x et y deux réels tels que $x < y$.

- Supposons $0 < x < y$ et notons $h = y - x$. Soit

  $$n = \mathrm{E}\left(-\frac{\ln h}{\ln b}\right) + 1$$

  alors $n > \frac{\ln \frac{1}{h}}{\ln b}$ donc $n \ln b > \ln \frac{1}{h}$ donc $b^n > \frac{1}{h}$ donc

  $$\frac{1}{b^n} < h$$

  Soit $m = \mathrm{E}(b^n x) + 1$. On a

  $$m - 1 \leq b^n x < m$$

  donc

  $$\frac{m-1}{b^n} \leq x < \frac{m}{b^n}$$

  En outre

  $$\frac{n}{b^n} = \frac{m-1}{b^n} + \frac{1}{b^n} \leq x + \frac{1}{b^n} < x + h = y$$

  Il résulte des deux propositions précédentes que

  $$x \leq \frac{m}{b^n} \leq y$$

  ainsi $\exists e \in E_b$ tel que $x \leq \frac{m}{b^n} \leq y$.

- Supposons $x < y < 0$. La démonstration est analogue à la précédente.

- Supposons $x < 0 < y$. Comme $0 \in E$, il existe e dans E_b tel que $x \leq \frac{m}{b^n} \leq y$.

En conséquence, $\exists e \in E_b$ tel que $x \leq \frac{m}{b^n} \leq y$.

2. Comme E est un sur-ensemble d'un ensemble dense (et même de plusieurs !) il est lui-même dense. En effet, soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$ alors $\exists e \in E_2$ tel que $x \leq e \leq y$. Or $E_2 \subset E$ donc $\exists e \in E$ tel que $x \leq e \leq y$.

Exercice III

On a $E \subset \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus E$. Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il en est de même du sur-ensemble $\mathbb{R} \setminus E$.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ contient des éléments de $\mathbb{R} \setminus E$ (en vertu de la densité de cet ensemble dans $\mathbb{R}$) donc il n'est pas inclus dans E. Il en ŕesulte que E n'est pas un voisinage de 0 qui est pourtant un élément de E. Donc E n'est pas voisinage de l'un de ses points, ce n'est donc pas un ouvert.

2. Soit $x \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contient des éléments de $\mathbb{R} \setminus E$ (en vertu de la densité de cet ensemble dans $\mathbb{R}$) donc il n'est pas inclus dans E. Il en ŕesulte que E n'est pas un voisinage de x. Ainsi E n'est voisinage d'aucun de ses points.

Exercice IV

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la densité de E dans $\mathbb{R}$ donne

$$\left]\pi - \frac{1}{n}, \pi + \frac{1}{n}\right[\cap E \neq \emptyset$$

Soit alors u_n dans cette intersection. On a

i) $u_n \in E$

ii) $|u_n - \pi| < \frac{1}{n}$

Il en résulte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de E dont la limite est π.