

## Devoir 2

*corrigé*

### Exercice I

1. Considérons  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(t) = \frac{1}{t^2}$  alors  $\int_1^n f(t)dt = -\frac{1}{n} + 1$  donc  $\Phi(f)$  est défini et on a

$$\Phi(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

2. Considérons  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(t) = \frac{1}{t}$  alors  $\int_1^n f(t)dt = \ln n - \ln 1 = \ln n$  ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(t)dt = +\infty$$

dont  $\Phi(f)$  n'est pas défini.

3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, définissons

$$I_n = \int_1^n f(t)dt$$

Si  $t \in [k, k+1]$  alors  $f(t) \leq f(k+1)$ . En intégrant entre  $k$  et  $k+1$ , il vient  $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1) = u_{k+1}$  par suite  $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}$  ainsi

$$I_n \leq \sum_{k=2}^n u_k$$

Le membre de droite étant convergent, il est majoré par un réel  $M$  indépendant de  $n$ . Ainsi  $I_n \leq M$ . Par ailleurs

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$$

donc  $(I_n)$  est croissante. Ainsi  $(I_n)$  est croissante et majorée, elle est donc convergente. Il en résulte que  $f$  est dans le domaine de définition de  $\Phi$ .

### Exercice II

1. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, la relation de Chasles donne

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \tag{1}$$

Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  alors

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt$$

en réalisant le changement de variables  $u = t + k$ , il vient

$$\int_k^{k+1} f(t) dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi u + k\pi)}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

La variable  $u$  étant muette, il est possible de la changer en  $t$ . En outre, si  $k$  est pair alors  $\sin(\pi t + k\pi) = \sin(\pi t)$  et si  $k$  est impair alors  $\sin(\pi t + k\pi) = -\sin(\pi t + (k-1)\pi + \pi) = \sin(\pi t + \pi) = \sin(\pi t)$ . Ainsi  $\sin(\pi t + k\pi) = (-1)^k \sin(\pi t)$ , d'où

$$\int_k^{k+1} f(t) dt = (-1)^k \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt$$

Il résulte de (1) que

$$\int_1^n f(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt$$

**2.** Soit  $k$  un entier naturel  $n$  non nul, alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $t + k + 1 \geq t + k$  donc

$$\frac{1}{(t+k+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(t+k)^{\frac{3}{2}}}$$

Or  $\sin(\pi t) \in [0, 1]$  donc

$$\frac{\sin(\pi t)}{(t+k+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}}$$

en intégrant entre 0 et 1, il vient  $v_{k+1} \leq v_k$ , c'est-à-dire la décroissance de  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ . Par ailleurs la positivité de  $\frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}}$  sur  $[0, 1]$  entraîne la positivité de  $v_k$ . Enfin,

$$\frac{1}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

on a

$$v_k = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt \leq \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{k^{\frac{3}{2}}} dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{k^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

or  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = 0$  et  $v_k \geq 0$  donc  $\lim v_k = 0$ . En conclusion,  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite positive, décroissante et convergente vers 0.

**3.** Soit  $n$  un entier naturel non nul et

$$I_n = \int_1^n \frac{\sin(\pi t)}{t\sqrt{t}} dt$$

En vertu de la question précédente,  $I_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_k$  avec

i)  $v_k \geq 0$

ii)  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante

iii)  $\lim v_k = 0$

iv) Pour entiers naturels non nuls  $p$  et  $q \geq p$ ,

$$\left| \sum_{k=p}^q (-1)^k \right| \leq 1$$

En vertu du théorème d'Abel,  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k v_k$  converge, donc  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. Ainsi  $f$  est dans le domaine de définition de  $\Phi$