Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S1 – Année 2006-2007
ESI CS 1102 – Analyse I — Promotion ESILV 2011

Devoir 2

A rendre le 5/12/2006

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce devoir, on s'interessera à l'application Φ définie par

$$\begin{array}{rcl} \Phi \,:\, E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_1^n f(t)dt \end{array}$$

Exercice I

1. Donner un exemple d'élément f de E pour lequel $\Phi(f)$ est défini.

2. Donner un exemple d'élément f de E pour lequel $\Phi(f)$ n'est pas défini.

3. Soit $f \in E$ décroissante et positive. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout n entier naturel non nul. Montrer que si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ converge}$$

alors f est dans le domaine de définition de Φ.

Exercice II

Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{t\sqrt{t}}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt$$

2. Montrer que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par

$$v_k = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{(t+k)^{\frac{3}{2}}} dt$$

est positive, décroissante et converge vers 0.

3. En déduire que f est dans le domaine de définition de Φ.