Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Devoir 1

corrigé

Exercice I

1. Notons l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier n, nous avons

$$|v_n - l^2| = |u_n^2 - l^2| = |u_n - l|\,|u_n + l| \tag{2}$$

Par ailleurs, la définition de la limite donne

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon' \tag{3}$$

Lorsque $\varepsilon' = 1$, cela entraine l'existence d'un entier N_1 tel que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < 1$$

ainsi lorsque $n \geq N_1$, nous avons $-1 < u_n - l < 1$ et donc $2l - 1 < u_n + l < 2l + 1$. Notons $M = \max\{|2l+1|, |2l-1|\}$, nous avons alors

$$n \geq N_1 \Rightarrow |u_n + l| < M$$

Nous remarquons que $M > 0$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. En vertu de (3) lorsque $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Soit alors $N = \max\{N_1, N_2\}$, on a $n \geq N_1$ donc $|u_n + l| < M$ et $n \geq N_2$ donc $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{M}$, par suite

$$|u_n + l||u_n - l| < M\frac{\varepsilon}{M}$$

L'équation (2) entraine

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - l^2| < \varepsilon$$

si bien que l'on a établit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |v_n - l^2| < \varepsilon$$

c'est-à-dire la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l^2.

2. La convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'entraine pas la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, comme le montre le contre-exemple suivant :

$$u_n = (-1)^n$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas mais son carré est la suite constante égale à 1, qui converge.

3. Soit $L = \lim v_n$.

- Supposons $L = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on a

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |v_n| < \varepsilon'$$

en particulier lorsque $\varepsilon' = \varepsilon^2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow u_n^2 < \varepsilon^2$$

Or u_n et ε sont des quantités positives. Par suite

$$n \geq N \Rightarrow u_n < \varepsilon$$

si bien que l'on a établit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

c'est-à-dire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

- Supposons $L > 0$. Notons $l = \sqrt{L}$, on a $l > 0$. Par hypothèses, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$, donc $u_n + l \geq l > 0$ donc

$$\frac{1}{|u_n + l|} < \frac{1}{l}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, on a

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |v_n - L| < \varepsilon'$$

ainsi, en utilisant (2) et en posant $\varepsilon' = l\varepsilon$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l|\,|u_n + l| < l\varepsilon$$

par suite

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

si bien que l'on a établit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

c'est-à-dire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $l = \sqrt{L}$.

Exercice II

1. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de $(a_n^2 + b_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $3l^2$ donne l'existence d'un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 - 3l^2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La convergence de $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\frac{1}{2}l^2$ donne l'existence d'un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_2 \Rightarrow \left| a_n b_n - \frac{1}{2} l^2 \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ce qui donne

$$n \geq N_2 \Rightarrow |2a_n b_n - l^2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ alors

$$n \geq N \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \geq N_1 \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 - 3l^2| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq N_2 \Rightarrow |2a_nb_n - l^2|\varepsilon \end{array} \right.$$

ainsi

$$n \geq N \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 - 3l^2| + |2a_nb_n - l^2| < \varepsilon$$

or

$$|(a_n^2 + b_n^2 - 3l^2) + (2a_nb_n - l^2)| \leq |a_n^2 + b_n^2 - 3l^2| + |a_nb_n - l^2|$$

donc

$$n \geq N \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n - 4l^2| < \varepsilon$$

si bien que l'on a établit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n - 4l^2| < \varepsilon$$

cést-à-dire (1).

2. On a $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n$, la question précédente permet d'écrire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |(a_n + b_n)^2 - (2l)^2| < \varepsilon$$

ainsi $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}^2$ converge vers $(2l)^2$. Comme $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, l'exercice I permet d'affirmer que $\lim(a_n + b_n) = 2|l|$.

3. On a $\lim(a_n + b_n) = 2|l|$ et $\lim(a_n - b_n) = l$. Or

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}[(a_n + b_n) + (a_n - b_n)] \\ b_n &= \frac{1}{2}[(a_n + b_n) - (a_n - b_n)] \end{aligned}$$

ainsi $\lim a_n = |l| + \frac{1}{2}l$ et $\lim b_n = |l| - \frac{1}{2}ll$. Il s'en suit que $\lim(a_nb_n) = (|l| + l/2)(|l| - l/2) = |l|^2 - \frac{1}{4}l^2 = \frac{3}{4}l^2$, ainsi

$$\frac{3}{4}l^2 = \frac{1}{2}l^2$$

d'où $l^2 = 0$, ainsi

$$l = 0$$

et

$$\lim a_n = 0$$

$$\lim b_n = 0$$