

Devoir 1

A rendre le 23/10/2006

Exercice I

Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définissons la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$v_n = u_n^2$$

1. Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. En utilisant la définition de la limite, montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également convergente.
2. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, peut-on en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ?
3. Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. En utilisant la définition de la limite, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice II

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \lim (a_n^2 + b_n^2) = 3l^2 \\ \lim (a_n b_n) = \frac{1}{2}l^2 \\ \lim (a_n - b_n) = l \end{cases}$$

1. En utilisant la définition de la limite, démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 - 4l^2| < \varepsilon \quad (1)$$

2. Dédurre de (1) la limite de $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Déterminez leur limite et la valeur de l .