Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Correction des exercices de la feuille 7

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice I

1. L'ensemble K_i est la réunion de 2^i intervalles disjoints de longueur $\frac{1}{3^i}$. Notons $F_{i,0}, \dots, F_{i,2^i-1}$ ces intervalles. On a par exemple

$$F_{0,0} = [0;1]$$

$$F_{1,0} = \left[0;\frac{1}{3}\right] \quad F_{1,1} = \left[\frac{2}{3};1\right]$$

$$F_{2,0} = \left[0;\frac{1}{9}\right] \quad F_{2,1} = \left[\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right] \quad F_{2,2} = \left[\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right] \quad F_{2,3} = \left[\frac{8}{9};1\right]$$

Supposons avoir fait la construction à l'étape i et notons

$$F_{i,j} = [a_{i,j}, b_{i,j}]$$

on a $b_{i,j} = a_{i,j} + \frac{1}{3}$. A l'étape $i+1$ l'intervalle $F_{i,j}$ sera remplacé par les intervalles $F_{i+1,2j}$ et $F_{i+1,2j+1}$ avec

$$F_{i+1,2j} = \left[a_{i,j}, a_{i,j} + \frac{1}{3^{i+1}}\right]$$

$$F_{i+1,2j+1} = \left[a_{i,j} + \frac{2}{3^{i+1}}, a_{i,j} + \frac{1}{3^i}\right]$$

ainsi définissions $(a_{i,j})_{i,j}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcll} a_0, j & = & 0 & \forall j \in \mathbb{N} \\ a_{i+1,2j} & = & a_{i,j} & \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i+1,2j+1} & = & a_{i,j} + \frac{1}{3^{i+1}} & \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \end{array}\right.$$

ceci défini des nombres $a_{i,j}$ pour tout entier i et pour tout entier $j < 2^i$. L'ensemble

$$K_i = \bigcup_{j=0}^{2^i-1} F_{i,j}$$

est bien défini. De plus $K_i \subset K_{i-1}$ pour tout entier i non nul. On obtient l'ensemble triadique de Cantor avec

$$K = \bigcap_{i=0}^{+\infty} K_i$$

2. L'ensemble K est fermé puisqu'il est une intersection de fermés. Il n'est pas ouvert puisque K est fermé et que ce n'est ni $\emptyset$ ni $\mathbb{R}$.

3. Les élements de K_1 sont ceux qui sécrivent

$$\overline{0,0\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,1\dots}^3$$

ceux de K_2 sont ceux qui sécrivent

$$\overline{0,00\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,01\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,10\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,11\dots}^3$$

pour montrer que les réels de K_i sont ceux dont un développement ternaire ne contient que des 0 et des 2 jusqu'à la i-ième position incluse on procède par récurrence. Soit P_i cette proposition. Alors

- P_1 est vrai
- supposons P_i vrai. Soit $x \in K_{i+1}$ alors

  $$x = \overline{0, a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3$$

  donc

  $$3x = \overline{a_1, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3 = a_1 + \overline{0, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3$$

  par construction de K on a $\overline{0, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3 \in K_i$ donc pour tout entier p compris entre 2 et $i+1$ on a $a_p \in \{0;1\}$. On a aussi $a_1 = 0$ donc P_{i+1} est vrai.

En conséquence les élements de K sont ceux dont un développement ternaire ne contient que des 0 et des 2.

4. Soit ψ l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & [0;1] \\ x = \overline{0, a_1 a_2 \dots}^3 & \longmapsto & \displaystyle\sum_{p \geq 1} \frac{a_p/2}{2^p} \end{array}$$

$a_p/2 \in \{0;1\}$ puisque $a_p \in \{0;2\}$, l'image de x est un réel donné par son développement binaire. Cette application est bien surjective car tout nombre de $[0;1]$ admet un développemnt binaire.

On a vu dans la feuille d'exercices 4 que l'intervalle $[0;1]$ n'est pas dénombrable donc K ne l'est pas non plus. En effet si K l'etait on pourrait numéroter ses élements et par la même les éléments de $[0;1]$ en choisissant comme numéro l'un des numéro de l'image réciproque par ψ.

5. Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. Soit n un entier tel que

$$\frac{1}{3^n} < 2\varepsilon$$

un tel entier n existe forcément, il suffit par exemple de prendre $n = \min\{1, \mathrm{E}(\frac{\ln(2\varepsilon)}{\ln 3})\}$. L'ensemble K_n est une réunion disjointe d'intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$, chaque composante disjointe étant espacée de $\frac{1}{3^n}$. Ainsi K_n ne peut pas contenir un intervalle de longueur supérieure à $\frac{1}{3^n}$, il vient

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\not\in K_n$$

donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\not\in K$ donc K n'est pas un voisinage de x. Par suite $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

Exercice IV

Les cas ou A est vide est trivial. Supposons $A \neq \emptyset$. Soit $x \in \overline{A}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

or $A \subset B$ donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap B$ ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap B \neq \emptyset$$

donc $x \in \overline{B}$. Ce qui établit que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Exercice V

Le cas ou A ou B est vide est trivial, supposons donc ces deux ensembles non-vides.

Soit $x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ alors $x \in \overset{\circ}{A}$ ou $x \in \overset{\circ}{B}$ ainsi

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \text{ ou}$$

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset B$$

donc[1]

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \cup B$$

par suite $x \in \overset{\circ}{(A \cup B)}$ donc $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{(A \cup B)}$. L'inclusion réciproque est fausse, comme le montre ce contre-exemple :

$$A = [-1,0],\ B = [0,1],\ A \cup B = [-1,1]$$

$$\overset{\circ}{A} =]-1,0[,\ \overset{\circ}{B} =]0,1[,\ \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]-1,0[\cup]0,1[$$

$$\overset{\circ}{(A \cup B)} =]-1,1[\not\subset]-1,0[\cup]0,1[= \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$$

on en déduit la comparaison suivante :

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{(A \cup B)}$$

Soit $x \in \overset{\circ}{(A \cap B)}$ alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \cap B$$

donc

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \text{ et }]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset B$$

donc

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \text{ et}$$

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset B$$

donc $x \in \overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{B}$ ainsi

$$x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, alors

$$\exists \varepsilon_1 > 0,\ ]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset A \text{ et}$$

$$\exists \varepsilon_2 > 0,\ ]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset B$$

soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, on a $\varepsilon > 0$ et

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \text{ et }]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset B$$

donc

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A \cap B$$

ainsi

$$x \in \overset{\circ}{(A \cap B)}$$

ce qui établit que $\overset{\circ}{(A \cap B)} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et donc

$$\overset{\circ}{(A \cap B)} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

[1] On remarquera que la réciproque de ce "donc" est fausse : un ensemble qui appartient à la réunion peut n'appartenir ni à A ni à B puisqu'il peut y avoir un "morceau" dans A et un "morceau" dans B.

Exercice VI

On a

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \mathbb{R} \smallsetminus (\mathbb{R} \smallsetminus \overline{A \cup B}) \\
&= \mathbb{R} \smallsetminus (\mathbb{R} \smallsetminus (A \cup B))^{\circ} \\
&= \mathbb{R} \smallsetminus ((\mathbb{R} \smallsetminus A) \cap (\mathbb{R} \smallsetminus B))^{\circ}
\end{aligned}$$

L'exercice précédent donne

$$((\mathbb{R} \smallsetminus A) \cap (\mathbb{R} \smallsetminus B))^{\circ} = (\mathbb{R} \smallsetminus A)^{\circ} \cap (\mathbb{R} \smallsetminus B)^{\circ}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \mathbb{R} \smallsetminus ((\mathbb{R} \smallsetminus A)^{\circ} \cap (\mathbb{R} \smallsetminus B)^{\circ}) \\
&= \mathbb{R} \smallsetminus ((\mathbb{R} \smallsetminus \overline{A}) \cap (\mathbb{R} \smallsetminus \overline{B})) \\
&= (\mathbb{R} \smallsetminus (\mathbb{R} \smallsetminus \overline{A})) \cup (\mathbb{R} \smallsetminus (\mathbb{R} \smallsetminus \overline{B})) \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

Le cas ou A ou B est vide est trivial, supposons donc ces deux ensembles non-vides. Soit $x \in \overline{A \cap B}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (A \cap B) \neq \emptyset$$

or $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (A \cap B) \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A$ et $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (A \cap B) \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap B$ donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A$ et $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap B$ sont non-vides. On en déduit que $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. Il en résulte que

$$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant :

$$A = [-1, 0[,\ B =]0, 1],\ A \cap B = \emptyset$$

$$\overline{A} = [-1, 0],\ \overline{B} = [0, 1],\ \overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\} \not\subset \emptyset = \overline{A \cap B}$$

on en déduit la comparaison suivante :

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Exercice VII

1. L'intérieur d'un ensemble est inclus dans cet ensemble donc $\overset{\circ}{\overline{X}} \subset \overline{X}$. En vertu de l'exercice IV, $\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}} \subset \overline{\overline{X}}$. Or $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ ainsi $\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}} \subset \overline{X}$. l'exercice III donne alors

$$\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}} \subset \overset{\circ}{\overline{X}}$$

Réciproquement $\overset{\circ}{\overline{X}} \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}$ puisque l'adhérence d'un ensemble contient cet ensemble. En vertu de l'exercice III, $\overset{\circ}{\overset{\circ}{\overline{X}}} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}}$. Or $\overset{\circ}{\overset{\circ}{\overline{X}}} = \overset{\circ}{\overline{X}}$ donc

$$\overset{\circ}{\overline{X}} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}}$$

Il en résulte que

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{X}}}} = \mathring{\overline{X}}$$

c'est-à-dire que $f \circ f = f$. On dit que f est une projection.

L'adhérence d'un ensemble contient cet ensemble donc $\mathring{X} \subset \overline{\mathring{X}}$. En vertu de l'exercice III, $\mathring{\mathring{X}} \subset \mathring{\overline{\mathring{X}}}$. Or $\mathring{\mathring{X}} = \mathring{X}$ ainsi $\mathring{X} \subset \mathring{\overline{\mathring{X}}}$. l'exercice IV donne alors

$$\overline{\mathring{X}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}}$$

Réciproquement $\mathring{\overline{\mathring{X}}} \subset \overline{\mathring{X}}$ puisque l'intérieur d'un ensemble est inclus dans cet ensemble. En vertu de l'exercice IV, $\overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{X}}}$. Or $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ donc

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}} \subset \overline{\mathring{X}}$$

Il en résulte que

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}} = \overline{\mathring{X}}$$

c'est-à-dire que $g \circ g = g$. On dit que g est une projection.

2. Considérons

$$A = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup([2, 3] \cap \mathbb{Q}) \cup \{4\}$$

alors

$$\begin{array}{rcl}
\overline{A} & = & [-1, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\} \\
\mathring{A} & = &]-1, 0[\cup]0, 1[\\
\mathring{\overline{A}} & = &]-1, 1[\cup]2, 3[\\
\overline{\mathring{A}} & = & [-1, 1] \\
\overline{\mathring{\overline{A}}} & = & [-1, 1] \cup [2, 3] \\
\mathring{\overline{\mathring{A}}} & = &]-1, 1[
\end{array}$$

Les ensembles

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \mathring{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

sont deux à deux distincts.

3. En vertu de la quesiton 1, si on considère l'intérieur ou l'adhèrence de l'un de ces ensembles on retrouve l'un de ces ensembles.