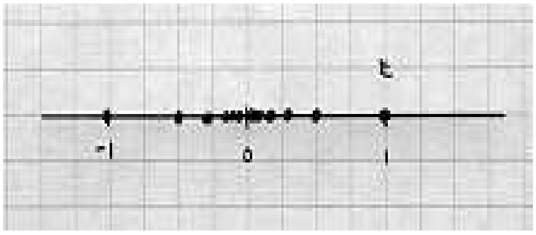
Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S1 – Année 2006-2007
ESI CS 1102 – Analyse I — Promotion ESILV 2011

Correction des exercices de la feuille 6

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice VI

1.



2. Considérons $A = \mathbb{R} \setminus E$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{1}{\varepsilon}$ (il suffit de prendre $n = \mathrm{E}(\frac{1}{\varepsilon})$). On a donc $\frac{1}{n} \in]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[$, or $\frac{1}{n} \in E$ donc $\frac{1}{n} \notin A$. Par suite

$$]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[\not\subset A$$

il en résulte que A n'est pas voisinage de 0. On a $0 \notin E$ donc $0 \in A$ donc A n'est pas un ouvert. Ainsi E n'est pas un fermé.

Exercice VII

Supposons que A ou B est ouvert. Sans perte de généralité on peut supposer que c'est A.

- Si A ou B est vide alors $A + B$ est vide, dans ce cas A ou B ouvert implique $A + B$ ouvert.
- Sinon, soit $x \in A + B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Comme A est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$. Alors $]a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon[\subset A + B$, ce qui donne

  $$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A + B$$

  donc $A + B$ est voisinage de x. Ainsi $A + B$ est un ouvert.

La réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : $A = [0, +\infty[$, $B =]-\infty, 0]$, $A + B = \mathbb{R}$.