

Feuille d'exercices 4

Séries numériques, II

Exercice I

Soit α et β deux réels. On se propose de déterminer la nature de la série suivante en fonction de α et β .

$$S = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Cette série s'appelle série de Bertrand¹.

1. Etudier la convergence de S si $\alpha > 1$ ou si $\alpha < 1$.
2. On se place dans le cas $\alpha = 1$. Montrer que si $\beta \leq 0$ alors la série diverge.
3. On suppose que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Soit f_β la fonction définie par

$$f_\beta(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$$

Déterminer une primitive F_β de la fonction f_β (on pourra distinguer les cas $\beta = 1$ et $\beta \neq 1$).

4. Etudier la convergence de S dans le cas $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.
5. Énoncez une règle générale en fonction de α et β .

Exercice II

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

¹Joseph Bertrand, mathématicien Français du XIXe siècle est surtout connu pour ses travaux en géométrie différentielle et théorie des probabilités. En 1845 il conjectura que pour tout entier $n > 3$, il y a au moins un nombre premier entre n et $2n - 2$. Ce résultat fut démontré en 1850 par Chebyshev.



Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)

Exercice III

1. En utilisant l'exercice I de la feuille 3, simplifier la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{j=1}^n (j^3 - \cos(j)) + \sum_{i=0}^n \cos(i)$$

2. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_n}{n^5}$$

est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?

Exercice IV

Quelle est la nature de la série suivante ?

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 + n \sin n}{n^3}$$

Exercice V

1. Soit (a_n) une suite d'entiers dans $[0; 9]$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

converge vers un réel x de $[0; 1]$. On appellera *développement décimal* de x la suite des (a_n) , et on notera $x = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$.

2. Réciproquement, soit $x \in [0; 1]$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers (a_n) dans $[0; 9]$ telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

3. Pour $x \in [0; 1]$, cette suite est-elle toujours unique ?
4. Démontrer que $[0; 1]$ n'est pas dénombrable (Indication : supposer qu'il existe une bijection de \mathbb{N} dans $[0, 1]$ et construire un réel de $[0, 1]$ qui n'est l'image d'aucun entier.)
5. En déduire que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Exercice VI

1. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{0; 1; 2\}$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$ converge vers un réel x de $[0; 1]$. On appellera *développement ternaire* de x la suite des (a_n) , et on notera $x = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}_3$.

2. Réciproquement, soit $x \in [0; 1]$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers (a_n) avec $a_n \in \{0; 1; 2\}$ et $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

3. Pour $x \in [0; 1]$, cette suite est-elle toujours unique ?