Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 1102 – Analyse I

S1 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2011

Feuille d'exercices 2

Suites numériques

Exercice I

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \\ v_n &= \ln u_n \\ w_n &= \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

et la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\ln(x-1)-\ln x$$

Dans cet exercice on montrera la formule de Stirling-De Moivre[1]

$$n!\sim C\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$$

on montrera que $C>\exp\frac{4}{5}$, ce réel est en fait $\sqrt{2\pi}$ mais on ne le démontrera pas ici.

1. Montrer que $v_n-v_{n-1}=(n-\frac{1}{2})f(n)$.

2. Etudier les variations des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer qu'il existe un réel positif C tel que $\lim u_n=C$.

4. Montrer que pour tout entier $k\geq 2$ on a

$$\frac{1}{k^2}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}dx$$

en déduire que pour tout entier $n\geq 2$ on a

$$w_n\leq\int_1^n\frac{1}{x^2}dx$$

et interpreter graphiquement ces deux inégalités.

[1] Abraham de Moivre, mathématicien Français puis Anglais, du XVIIIe siècle, fut à l'origine de la géométrie analytique et de la théorie des probabilités. Dans *Miscellanea Analytica* paru en 1730 apparaît la formule qui va être démontrée dans cet exercice (par une autre méthode). Elle fut, à tort, attribuée à James Stirling et elle est souvent connue sous le nom de "Formule de Stirling". Abraham de Moivre est également connu pour la formule $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Abraham de Moivre (1667-1754)

5. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel inférieur à 1.

6. Montrer que
$$\forall x \in [2,+\infty[,\ f(x) \geq -\frac{1}{5x^2(x-\frac{1}{2})}$$

7. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a $v_k - v_{k-1} \geq -\frac{1}{5k^2}$.

8. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a $v_n \geq -\frac{1}{5}w_n + 1$.

9. En déduire que $C \geq e^{\frac{4}{5}}$

10. En déduire un équivalent de $n!$ en $+\infty$.

Exercice II

Dans les cas suivants, dire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le cas échéant, précisez quelle est l'application φ utilisée.

1. $u_n = 4n$, $v_n = n$

2. $u_n = n$, $v_n = n^2$

3. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{2n+1}{2n}$

4. $u_n = 4^n$, $v_n = (-1)^n$

5. $u_n = e^n$, $v_n = 2^n$

6. $u_n = n^2$, $v_n = 2n^2 + 1$

7. $u_n = n^p$, $v_n = n^q$, où p et q sont des entiers naturels. Discuter selon p et q le cas échéant.

Exercice III

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = au_n + b$$
Determiner le terme général de la suite (u_n) en fonction de u_0, a et b.

Exercice IV

Soit $s \in \mathbb{N}^*$ un entier et
$$A_s = \left\{\frac{1}{n},\ n \in [\![1,s]\!]\right\}$$
Montrer qu'une suite convergente d'éléments de A_4 est constante à partir d'un certain rang. Ce résultat peut-il être généralisé à A_s pour $s \in \mathbb{N}^*$ quelconque ?

Exercice V

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ admet-elle des sous-suites convergentes ?