Correction des exercices de la Feuille 1

Exercice non corrigé en travaux dirigés

Exercice VI

1. Considérons la fonction f définie sur $[8, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Cette fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables non nulles sur son domaine de définition, on a

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2\ln x}{(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)(\ln x - 2)}{(\ln x)^4}$$

On sait que $\ln 8 > 2$ donc

$$f'(x) > 0$$

donc f est croissante. Par suite (v_n) est croissante des que $n \geq 8$.

2. On a $v_8 = \frac{8}{(\ln 8)^2}$. Comme $\frac{8}{(\ln 8)^2} > 1$ on a

$$v_8 > 1$$

Comme (v_n) est croissante on en déduit que $v_n \geq v_8 > 1$ lorsque $n \geq 8$. Ainsi

$$\frac{n}{(\ln n)^2} \geq 1$$

donc

$$n \geq (\ln n)^2$$

3. Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons

$$N = \max\{8; \mathrm{E}(e^A) + 1\}$$

alors pour $n \geq N$ on a $n \geq e^A$ donc

$$\ln n \geq A$$

donc $\ln n(\ln n - A) \geq 0$ donc

$$(\ln n)^2 - A \ln n \geq 0$$

Or comme $n \geq 8$ on a

$$n \geq (\ln n)^2$$

ainsi $n - A\ln n \geq 0$ donc $n \geq A \ln n$ d'où finalement

$$\frac{n}{\ln n} \geq A$$

On a montré que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$$

ainsi

$$\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$$