Devoir 2

Corrigé

Exercice I

1. Considérons la fonction objectif P définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} P(Q_1,Q_2,Q_3) = {} & (-18.89 + 4.51Q_1 - 5.08\,10^{-2}Q_1^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \\ & + (-24.51 + 4.80Q_2 - 5.85\,10^{-2}Q_2^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \\ & + (-27.02 + 4.87Q_3 - 4.79\,10^{-2}Q_3^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \end{aligned}$$

et la contrainte

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_T = 0$$

Soit alors L la fonction définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ par

$$L(Q_1,Q_2,Q_3,\lambda) = P(Q_1,Q_2,Q_3) + \lambda(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_T)$$

On a

$$\begin{aligned} & L(Q_1,Q_2,Q_3,\lambda) = \lambda(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_T) + \\ & (-70.42 + 4.51Q_1 - 5.08\,10^{-2}Q_1^2 + 4.80Q_2 - 5.85\,10^{-2}Q_2^2 + 4.87Q_3 - 4.79\,10^{-2}Q_3^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \end{aligned}$$

Déterminons les points critiques de L. On a

$$\nabla L(Q_1,Q_2,Q_3,\lambda) = \begin{pmatrix} (4.51 - 10.16\,10^{-2}Q_1)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) + \lambda \\ (4.80 - 11.7\,10^{-2}Q_2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) + \lambda \\ (4.87 - 9.58\,10^{-2}Q_3)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) + \lambda \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_T \end{pmatrix}$$

ainsi $\nabla L(Q_1,Q_2,Q_3,\lambda) = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda + 4.51 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T) - 10.16\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)Q_1 = 0 \\ \lambda + 4.80 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T) - 11.7\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)Q_2 = 0 \\ \lambda + 4.87 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T) - 9.58\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)Q_3 = 0 \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_T = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{\lambda + 4.51 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)}{10.16\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)} \\ Q_2 = \frac{\lambda + 4.80 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)}{11.7\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)} \\ Q_3 = \frac{\lambda + 4.87 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)}{9.58\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)} \\ \frac{\lambda + 4.51 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)}{10.16\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)} + \frac{\lambda + 4.80 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)}{11.7\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)} + \frac{\lambda + 4.87 \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)}{9.58\,10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)} - Q_T = 0 \end{cases}$$

Notons $A(Q_T) = 10^{-2} \times (170 - 2\,10^{-3}Q_T)$, le système précédent est équivalent à

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{\lambda + 451\,A(Q_T)}{10.16\,A(Q_T)} \\ Q_2 = \frac{\lambda + 480\,A(Q_T)}{11.7\,A(Q_T)} \\ Q_3 = \frac{\lambda + 487\,A(Q_T)}{9.58\,A(Q_T)} \\ \frac{\lambda + 451\,A(Q_T)}{10.16\,A(Q_T)} + \frac{\lambda + 480\,A(Q_T)}{11.7\,A(Q_T)} + \frac{\lambda + 487\,A(Q_T)}{9.58\,A(Q_T)} - Q_T = 0 \end{cases}$$

Notons

$$\alpha = \frac{1}{10.16} + \frac{1}{11.7} + \frac{1}{9.58}$$
$$\beta = \frac{451}{10.16} + \frac{480}{11.7} + \frac{487}{9.58}$$

alors, le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{\lambda + 451\ A(Q_T)}{10.16 A(Q_T)} \\ Q_2 = \frac{\lambda + 480\ A(Q_T)}{11.7 A(Q_T)} \\ Q_3 = \frac{\lambda + 487\ A(Q_T)}{9.58 A(Q_T)} \\ \lambda = \frac{Q_T - \beta}{\alpha} A(Q_T) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{Q_T - \beta + 451\alpha}{10.16\alpha} \\ Q_2 = \frac{Q_T - \beta + 480\alpha}{11.7\alpha} \\ Q_3 = \frac{Q_T - \beta + 487\alpha}{9.58\alpha} \\ \lambda = \frac{Q_T - \beta}{\alpha} A(Q_T) \end{cases}$$

En outre

$$L_{XX}(Q_1, Q_2, Q_3, \lambda) = -A(Q_T) \begin{pmatrix} 10.16 & 0 & 0 \\ 0 & 11.7 & 0 \\ 0 & 0 & 9.58 \end{pmatrix}$$

qui est définie négative, ainsi le point trouvé correspond bien à un maximum local.

Les conditions d'utilisation des turbines conduisent à imposer à Q_T d'appartenir aux trois intervalles suivants

$$\begin{array}{rcccl} 7 \times 10.16\alpha + \beta - 451\alpha & \leq & Q_T & \leq & 31 \times 10.16\alpha + \beta - 451\alpha \\ 7 \times 11.7\alpha + \beta - 480\alpha & \leq & Q_T & \leq & 31 \times 11.7\alpha + \beta - 480\alpha \\ 7 \times 9.58\alpha + \beta - 487\alpha & \leq & Q_T & \leq & 35 \times 9.58\alpha + \beta - 487\alpha \end{array}$$

ce qui conduit à

$$\begin{array}{rcccl} 26.739 & \leq & Q_T & \leq & 97.033 \\ 21.486 & \leq & Q_T & \leq & 102.435 \\ 15.190 & \leq & Q_T & \leq & 92.518 \end{array}$$

Ce système de trois inéquations équivaut à

$$26.739 \leq Q_T \leq 92.518 \tag{1}$$

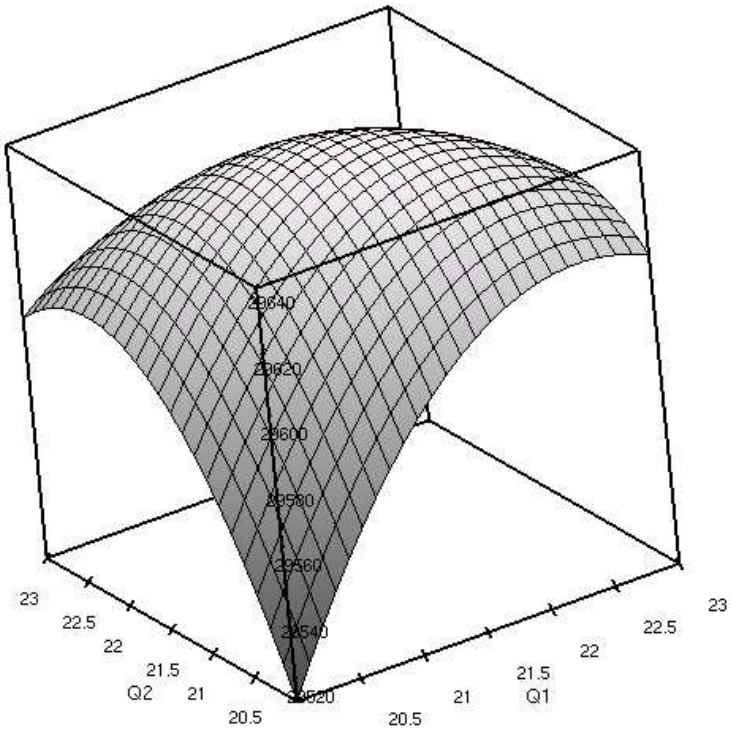
2. On a

$$\alpha \simeq 28.82\ 10^{-2}$$
$$\beta \simeq 136.25$$

ce qui conduit, pour $Q_T = 70$, à

$$\begin{cases} Q_1 \simeq 21.770 \\ Q_2 \simeq 21.384 \\ Q_3 \simeq 26.846 \end{cases}$$

qui sont les débits exprimés en m^3/s. On a alors une puissance d'environ 29861 kW.



Exercice II

1. Le facteur $(170 - 2\,10^{-3}(Q_1 + Q_2 + Q_3))$ induit une baisse de la puissance de la turbine lorsqu'une autre turbine est en fonctionnement. Il est possible que l'utilisation d'une seule turbine donne de meilleurs résultats. L'étude pour le flot d'entrée 28 m^3/s apporte une réponse à la question.

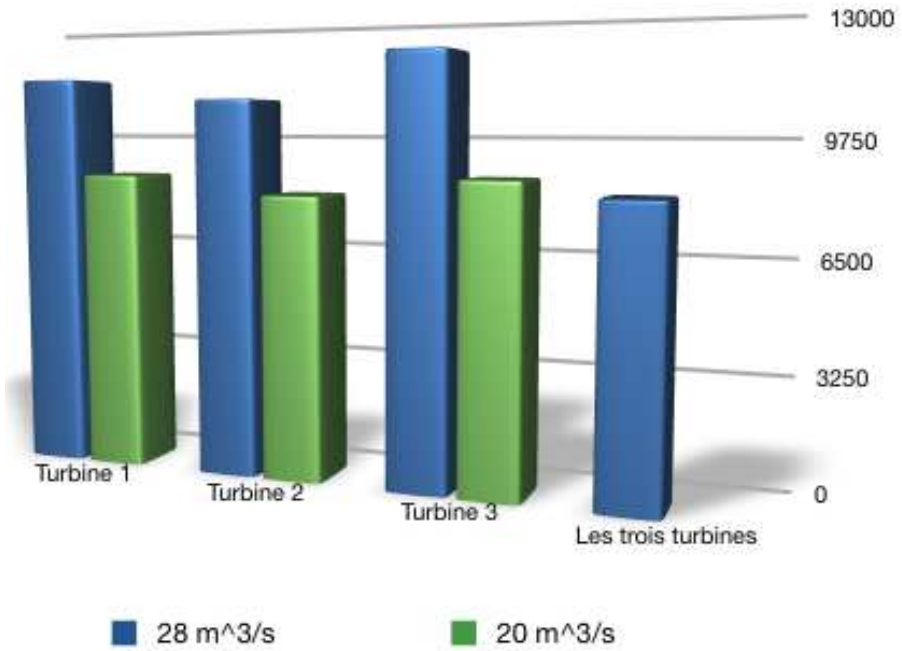
Lorsque $Q_T = 28$, les valeurs optimales des flots (en m^3/s), calculées dans l'exercice précédent sont

$$\begin{aligned} Q1 &\simeq 7.431 \\ Q2 &\simeq 8.931 \\ Q3 &\simeq 11.638 \end{aligned}$$

ainsi, la puissance maximale atteignable (en kW) lorsque les trois turbines fonctionnent est

$$P(Q_1, Q_2, Q_3) \simeq 8273$$

Or, pour un flot d'entrée de 28 m^3/s, la puissance de la première turbine, utilisée seule, est environ 11482 kW, celle de la deuxième turbine, utilisée seule, est environ 10881 kW et celle de la troisème turbine, utilisée seule, est environ 12200. Il vaut mieux utiliser une seule turbine : la troisième.



Lorsque $Q_T = 20$, il est possible de calculer les valeurs qui maximisent P, même si nous ne sommes pas dans les conditions (1) d'application de l'exercice I et que ces valeurs ne peuvent pas être implémentées dans la station hydro-éléctrique. Les valeurs sont

$$\begin{aligned} Q1 &\simeq 4.699 \\ Q2 &\simeq 6.559 \\ Q3 &\simeq 8.742 \end{aligned}$$

ainsi, la puissance maximale atteignable (en kW) lorsque les trois turbines fonctionnent est

$$P(Q_1, Q_2, Q_3) \simeq 2979$$

Or, pour un flot d'entrée de 20 m^3/s, la puissance de la première turbine est environ 8666 kW, celle de la deuxième turbine est environ 8173 kW et celle de la troisème turbine est environ 8705 kW. Il vaut mieux utiliser une seule turbine : la troisième.

2. Lorsque $Q_T = 42$, les valeurs optimales des flots (en m^3/s), calculées dans l'exercice précédent sont

$$\begin{aligned} Q1 &\simeq 12.210 \\ Q2 &\simeq 13.082 \\ Q3 &\simeq 16.708 \end{aligned}$$

ainsi, la puissance maximale atteignable (en kW) lorsque les trois turbines fonctionnent est

$$P(Q_1, Q_2, Q_3) \simeq 16627$$

Il convient d'étudier trois fonctions

$$\begin{aligned} P_{12}(Q_1, Q_2) = {} & (-18.89 + 4.51Q_1 - 5.08\,10^{-2}Q_1^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \\ & + (-24.51 + 4.80Q_2 - 5.85\,10^{-2}Q_2^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \end{aligned}$$

$$P_{13}(Q_1,Q_3) = (-18.89 + 4.51Q_1 - 5.08\,10^{-2}Q_1^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \\ + (-27.02 + 4.87Q_3 - 4.79\,10^{-2}Q_3^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T)$$

$$P_{23}(Q_2,Q_3) = (-24.51 + 4.80Q_2 - 5.85\,10^{-2}Q_2^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \\ + (-27.02 + 4.87Q_3 - 4.79\,10^{-2}Q_3^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T)$$

En explicitant la contrainte, cela conduit à

$$\begin{array}{rcl} f_{12}(x) & = & (-43.40 - 0.29x + 4.80Q_T - 5.08\,10^{-2}x^2 - 5.85\,10^{-2}(Q_T - x)^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \\ f_{13}(x) & = & (-45.91 - 0.36x + 4.87Q_T - 5.08\,10^{-2}x^2 - 4.79\,10^{-2}(Q_T - x)^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \\ f_{23}(x) & = & (-51.53 - 0.07x + 4.87Q_T - 5.85\,10^{-2}x^2 - 4.79\,10^{-2}(Q_T - x)^2)(170 - 2\,10^{-3}Q_T) \end{array}$$

Lorsque $Q_T = 42$, cela conduit à la maximisation des fonctions

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & 9346.39950 + 785.6915840x - 18.5718188x^2 \\ x & \mapsto & 12596.62071 + 622.5042576x - 16.7707092x^2 \\ x & \mapsto & 11641.69279 + 671.7798976x - 18.0790624x^3 \end{array}$$

qui sont maximisées pour

$$\begin{array}{ll} x \simeq 21.153 & \text{(ce qui correspond à } Q_1 = 21.153 \text{ et } Q_2 = 20.847) \\ x \simeq 18.559 & \text{(ce qui correspond à } Q_1 = 18.559 \text{ et } Q_3 = 23.441) \\ x \simeq 18.579 & \text{(ce qui correspond à } Q_2 = 18.559 \text{ et } Q_3 = 23.441) \end{array}$$

Les puissances fournies (en kW) sont alors respectivement 17656 pour les turbines 1 et 2, 18373 pour les turbines 1 et 3, 17882 pour les turbines 2 et 3. Il faut donc recommander d'utiliser deux turbines : 1 et 3, et de donner comme flux d'entrée

$$Q_1 = 18.559 \text{ et } Q_3 = 23.441$$

Remarquons que la question de savoir si une seule turbine serait plus efficasse est non pertinente puisque nous ne sommes pas dans les conditions d'exploitation d'une seule turbine qui ne peuvent supporter plus de 35 m^3/s.

3. Lorsque le flot d'entrée est de 96 m^3/s, nous ne pouvons pas utiliser une ou deux turbines puisque, dans le cas le plus favorble, nous serions limités respectivement à 35 m^3/s et 66 m^3/s. Il convient donc d'utiliser les trois turbines.

La difficulté vient du fait que nous ne sommes pas dans les conditions (1), donc que l'étude réalisée dans l'exercice I ne peut être appliquée. En effet, nous obtiendrions

$$\begin{array}{rcl} Q1 & \simeq & 30.647 \\ Q2 & \simeq & 29.092 \\ Q3 & \simeq & 36.261 \end{array}$$

Nous ne serions donc pas dans les conditions d'utilisation de la troisième turbine.

Intuitivement, si nous saturons la troisème contrainte et posons $Q_3 = 35$, il faut alors trouver Q_1 et Q_2 tels que $Q_1 + Q_2 = 61$ qui maximisent

$$(Q_1, Q_2) \mapsto P(Q_1, Q_2, 35)$$

ce qui revient à maximiser $x \to P(x, 61 - x, 35)$ Toutefois le résultat obtenu est strictement supérieur à 31. Le flux d'entrée de la première turbine ne pouvant être supérieur à 31, nous saturons la contrainte. On obtient alors

$$\begin{array}{rcl} Q1 & = & 31 \\ Q2 & = & 30 \\ Q3 & = & 35 \end{array}$$

et une puissance de 37985 kW.

Plus rigouresement, le calcul du Lagrangien avec les variables d'écart conduit à trois points à considérer : $(31, 30, 35)$, $(30, 31, 35)$ et $(31, 31, 34)$. Le calcul de la puissance obtenue en ces trois points confirme qu'il faut recommander $(31, 30, 35)$.