Devoir 1

Corrigé

Exercice I

1. Le gradient de f au point (x, y) est donné par

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) - 2y \\ 2y - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) - 2x \end{pmatrix}$$

ainsi (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - 2y - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \\ -2x + 2y - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \end{cases}$$

En conservant la première équation et en remplaçant la seconde par la différence des deux premières, le système ci-dessus est équivalent à

$$\begin{cases} 2x - 2y - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = x \\ \sin(\pi x) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y = x \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des points critiques est

$$\{(n, n),\ n \in \mathbb{Z}\}$$

On remarquera que cet ensemble est infini.

2. La matrice hessienne de f au point (x, y) est

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) & -2 - \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) \\ -2 - \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) & 2 - \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) \end{pmatrix}$$

Si (x, y) est critique alors $y = x$, ainsi

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\pi^2}{4}\cos(\pi x) & -2 - \frac{\pi^2}{4}\cos(\pi x) \\ -2 - \frac{\pi^2}{4}\cos(\pi x) & 2 - \frac{\pi^2}{4}\cos(\pi x) \end{pmatrix}$$

par ailleurs x est entier donc $\cos(\pi x)$ est égal à 1 ou à -1 selon la parité de x.

Premier cas : x est pair, alors $\cos(\pi x) = 1$, ainsi

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\pi^2}{4} & -2 - \frac{\pi^2}{4} \\ -2 - \frac{\pi^2}{4} & 2 - \frac{\pi^2}{4} \end{pmatrix}$$

Deuxième cas : x est impair, alors $\cos(\pi x) = -1$, ainsi

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+\frac{\pi^2}{4} & -2+\frac{\pi^2}{4} \\ -2+\frac{\pi^2}{4} & 2+\frac{\pi^2}{4} \end{pmatrix}$$

3. Soit (x,y) un point critique, alors $(x,y) = (x,x)$ avec x entier.

Premier cas : x est pair.

$$\det \mathrm{H}f(x,y) = \left(2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2 - \left(-2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2 = -2\pi^2 < 0$$

donc f admet un point-selle en (x,y).

Deuxième cas : x est impair, alors $\cos(\pi x) = -1$, ainsi

$$\det \mathrm{H}f(x,y) = \left(2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^2 - \left(-2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^2 = 2\pi^2 > 0$$

donc f admet un extremum en (x,y). On a

$$\operatorname{tr} \mathrm{H}f(x,y) = 4 + \frac{\pi^2}{2} > 0$$

donc f admet un minimum en (x,y)

Exercice II

1. Nous avons démontré dans l'exercice I que la fonction f admet une infinité de minima.

2. Si f admettait un maximum, celui-ci serait un point critique de f, or les seuls points critiques trouvés dans l'exercice I sont des minima et des points selles. Ainsi f n'admet aucun maximum.

3. Soit n un entier impair alors

$$f(n,n) = \cos(\pi n) = -1$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x,y) = (x-y)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) \geq -1 = f(n,n)$$

donc (n,n) est un minimum global.

4. La fonction f ne peut pas admettre de maximum global puisqu'elle n'admet pas de maximum local.

Exercice III

1. Soit x un nombre entier relatif pair. Il a été démnontré dans les questions précédentes que la fonction f admet un point-selle en (x, x). Dans un repère local centré en (x, y), les équations des lignes séparatrices de col ont pour équation

$$(\alpha\ \beta)\,\mathrm{H}f(x,x)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=0$$

c'ést-à-dire

$$\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)\alpha^2-2\left(2+\frac{\pi^2}{4}\right)\alpha\beta+\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)\beta^2=0 \tag{1}$$

c'ést-à-dire

$$\alpha^2-2\frac{8+\pi^2}{8-\pi^2}\alpha\beta+\beta^2=0$$

Chercher λ et μ tels que

$$(\alpha-\lambda\beta)(\alpha-\mu\beta)=\alpha^2-2\frac{8+\pi^2}{8-\pi^2}\alpha\beta+\beta^2$$

revier à chercher λ et μ dont le produit est égal à 1 et dont la somme est égale à $2\frac{8+\pi^2}{8-\pi^2}$; ce qui conduit à résoudre l'équation

$$\lambda^2-2\frac{8+\pi^2}{8-\pi^2}\lambda+1=0$$

Le discriminant du trinôme est

$$\Delta=4\left(\frac{8+\pi^2}{8-\pi^2}\right)^2-4=2\left(\frac{8\pi}{8-\pi^2}\right)^2$$

et ses racines sont

$$\frac{8+4\sqrt{2}\pi^2+\pi^2}{8-\pi^2}\quad\text{et}\quad\frac{8-4\sqrt{2}\pi^2+\pi^2}{8-\pi^2}$$

on considère donc

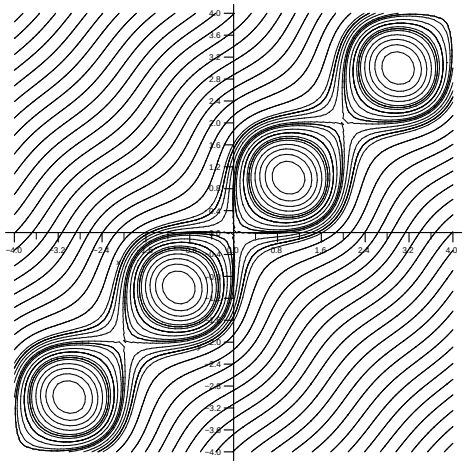
$$\lambda=\frac{8+4\sqrt{2}\pi^2+\pi^2}{8-\pi^2}\quad\text{et}\quad\mu=\frac{8-4\sqrt{2}\pi^2+\pi^2}{8-\pi^2}$$

il s'en suit que (1) équivaut à $\alpha=\lambda\beta$ ou $\alpha=\mu\beta$.

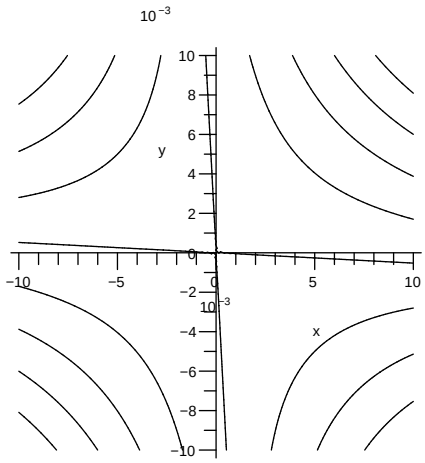
2. Afin d'esquisser les courbes de niveau au voisinage des cols, on calcule une valeur approchée de λ et μ

$$\lambda\simeq-19.06\quad\text{et}\quad\mu\simeq-0.05$$

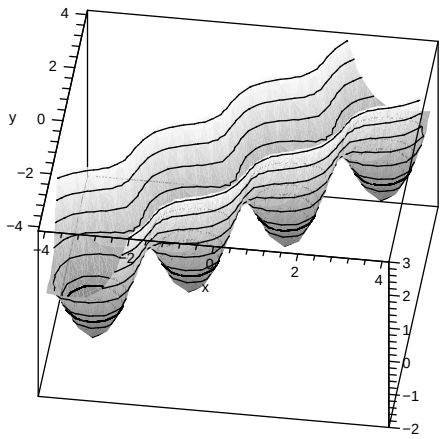
On obtient l'esquisse suivante.



Alors que le graphe pourrait laisser penser que les lignes séparatrices de col sont verticales, le calcul démontre qu'elles ne le sont pas. Un zoom sur les courbes de niveau à l'origine le confirme :



3. On obtient la représentation suivante.



Plusieurs choix d'axes et d'angle de vue sont possible. Notre choix d'axes est motivé par le fait que l'on souhaite voir les minima : une vue de dessus est inappropriée et une vue dans l'axe de l'alignement des points critiques est également inappropriée. Par ailleurs, le caractère périodique du sinus rend inutile la considération de la surface sur un domaine très large. La vue des quatre minima suffit pour avoir une idée du comportement de cette fonction sur $\mathbb{R}^2$.