Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2004-2005
Promotion ESILV 2009

Examen du 3/2/2005

Corrigé

Exercice I

Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Le réel e est un équilibre si et seulement si $e = f(e)$ ce qui équivaut à $e = e^2$ ce qui équivaut à $e(e-1) = 0$ ce qui équivaut à $e = 0$ ou $e = 1$. Les deux équilibres sont donc 0 et 1.

2. La fonction f est dérivable comme fonction polynomiale. Sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

- On a $f'(0) = 0$ donc $|f'(0)| < 1$ donc 0 est un équilibre stable
- On a $f'(1) = 2$ donc $|f'(1)| > 1$ donc 1 est un équilibre instable

Exercice II

On a

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + \sqrt{n} + 1} \right| = \frac{1}{n^2 + \sqrt{n} + 1} \leq \frac{1}{n^2}$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge puisque c'est une série de Riemann avec $s = 2 > 1$, le critère de comparaison donne la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + \sqrt{n} + 1} \right|$$

ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}+1}$ est absolument convergente et donc convergente.

Remarque : on pouvait aussi utiliser le théorème d'Abel avec $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \frac{1}{n^2+\sqrt{n}+1}$.

Exercice III

1. La fonction ψ est une somme de fonctions dérivables sur $[0;1]$. Sa dérivée est

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

Comme $x \geq 0$ on a $1 + x \geq 1$ donc $(1+x)^2 \geq 1 + x$, par suite

$$\frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+x}$$

ainsi $\psi' \geq 0$ donc ψ est croissante sur $[0;1]$. En outre $\psi(0) = 0$ donc $\psi \geq 0$ sur $[0;1]$.

Considérons la fonction θ définie sur $[0;1]$ par $\theta(x) = \psi(x) - \frac{1}{2}x^2$. Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

$$\theta'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} - x = -\frac{x^2(2+x)}{(1+x)^2}$$

Ainsi $\theta' \leq 0$ sur $[0;1]$ donc θ est décroissante. En outre $\theta(0) = 0$ donc $\theta \leq 0$ sur $[0;1]$.

Il en résulte que $\forall x \in [0;1],\ 0 \leq \psi(x) \leq \frac{1}{2}x^2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln(n+1) \\
&= -\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= -\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \psi\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n} \in]0;1]$, la question précédente permet d'affirmer que

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

3. On a

- Le terme général de la série v_n est positif
- Le terme général de la série v_n est majoré par $\frac{1}{2n^2}$
- La série $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $s = 2 > 1$.

En vertu du théorème de comparaison,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

converge.

Exercice IV

1. On a

$$u_n = \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

Or $\lim \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim \sqrt{n-1} = +\infty$ donc $\lim u_n = 0$.

2. Soit (H_n) l'hypothèse $v_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1$.

- (H_1) est vraie puisque $\sqrt{2} = v_1 = \sqrt{2} + \sqrt{1} - 1$.
- Supposons que (H_n) soit vraie alors $v_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1$ alors $v_n + u_{n+1} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ donc $v_{n+1} = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 1$. donc (H_{n+1}) est vraie.

3. Soit (H_n) l'hypothèse $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

- (H_1) est vraie puisque $u_1 = \sqrt{2} = v_1$
- Supposons que (H_n) soit vraie alors $\sum_{k=1}^{n} u_k = v_n$ alors $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = v_n + u_{n+1} = v_{n+1}$ donc (H_{n+1}) est vraie.

Ainsi $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ or $\lim v_n = +\infty$ donc la série diverge.