

## Examen du 3/2/2005

*Durée de l'épreuve : 2 heures*

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

### Exercice I (3 points)

On considère la relation de récurrence  $u_{n+1} = (u_n)^2$

1. Quels sont le ou les équilibres de cette relation ?
2. Pour chaque équilibre trouvé à la question précédente, dites s'il est stable ou instable.

### Exercice II (4 points)

La série suivante est-elle convergente ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sqrt{n} + 1}$$

### Exercice III (6.5 points)

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \\ v_n &= u_n - u_{n+1} \end{aligned}$$

1. Soit  $\psi$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par

$$\psi(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1$$

Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$  on a  $0 \leq \psi(x) \leq \frac{1}{2}x^2$ .

2. Montrer que  $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2n^2}$ ,
3. Quelle est la nature de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  ?

**Exercice IV** (6.5 points)

On considère  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$

1. Quelle est la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?
2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $v_1 = \sqrt{2}$  et  $v_{n+1} = v_n + u_{n+1}$  pour  $n \geq 1$ . Montrer par récurrence que

$$v_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1$$

3. En déduire la nature de  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .