Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2004-2005
Promotion ESILV 2009

Interrogation du 14/03/2005

Corrigé

Exercice I

1. Le polynôme $r^2 - 4r + 4$ admet 2 comme racine double. Il existe donc deux réels A et B indépendants de n tels que

$$u_n = A\,2^n + B\,n\,2^n$$

avec

$$\begin{cases} A = u_0 \\ 2A + 2B = u_1 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{2}u_1 - 1 \end{cases}$$

ainsi

$$u_n = 2^n \left(1 + \left(\frac{1}{2}u_1 - 1\right) n\right)$$

2. On a $\lim 2^n = +\infty$ donc (u_n) tend vers $-\infty$ si et seulement si $1 + (\frac{1}{2}u_1 - 1)n$ tend vers $-\infty$ ou vers un réel négatif, c'est le cas si et seulement si $\frac{1}{2}u_1 - 1 < 0$. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que $\lim u_n = -\infty$ est

$$u_1 < 2$$

Exercice II

On a $A = \emptyset$ donc A est un fermé.

Exercice III

1. Remarquons que

$$\left]-1 - \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}\right[\cap]0, +\infty[= \emptyset \quad \text{et} \quad \left]-1 - \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}\right[\cap \left\{-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{-1\}$$

ainsi

$$A \cap \left]-1 - \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}\right[= \{-1\}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, notons

$$y = \min\left\{-1 + \frac{\varepsilon}{2}, -1 + \frac{1}{4}\right\}$$

alors $y \in]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$, mais $y \in A$ car sinon $y \in \{-1\}$. Par suite

$$]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\not\subset A$$

par suite A n'est pas un voisinage de -1 qui est l'un de ses points, ce n'est donc pas un ouvert.

2. On a

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, -1[\cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1} \right[\right)$$

qui est une réunion d'intervalles ouverts et donc un ouvert. Ainsi A est un fermé.

3. On a

$$A \cap]-\infty, 0[= \left\{ -\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

cet ensemble n'est pas voisinage de -1 pour les mêmes raisons qu'à la question 1, et -1 est l'un de ses points. L'ensemble A n'est donc pas un ouvert.

4. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = -\frac{1}{n}$$

Cette suite est une suite d'éléments de

$$A \cap]-\infty, 0[= \left\{ -\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

elle converge vers $0 \notin A \cap]-\infty, 0[$. Donc $A \cap]-\infty, 0[$ n'est pas un fermé.

Exercice IV

1. Réponse : Non.

Soit $A =]0; 1]$ et $B = [1; 2[$ alors A et B sont d'intersection non vide et ils ne sont pas ouverts puisqu'ils ne sont pas voisinage de 1 qui est l'un de leur points. Pourtant

$$A \cup B =]0; 2[$$

est un intervalle ouvert, donc un ouvert.

2. Réponse : Non.

Soit $A =]1; 3]$ et $B = [0; 2[$ alors A et B sont d'intersection non vide et ils ne sont pas ouverts puisque A n'est pas voisinage de 3 et B n'est pas voisinage de 2. Pourtant

$$A \cap B =]1; 2[$$

est un intervalle ouvert, donc un ouvert.