

Interrogation du 14/03/2005

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (6 points)

Considérons une suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 4u_n - 4u_{n-1}$$

1. Déterminer le terme général de (u_n) en fonction de u_1 .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_1 pour que $\lim u_n = -\infty$

Exercice II (2.5 points)

L'ensemble $[-1; 2] \cap \{4\} \cap [5, +\infty[$ est-il un fermé ?

Exercice III (8 points)

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup [0, +\infty[$$

1. L'ensemble A est-il ouvert ?
2. L'ensemble A est-il fermé ?
3. L'ensemble $A \cap]-\infty, 0[$ est-il un ouvert ?
4. L'ensemble $A \cap]-\infty, 0[$ est-il un fermé ?

Exercice IV (3.5 points)

Soit A et B deux sous-ensembles de \mathbb{R} d'intersection non vide.

1. Est-il vrai que si A et B ne sont pas ouverts alors $A \cup B$ ne peut pas être ouvert ? Si oui, faites une démonstration. Si non donnez un contre-exemple.
2. Est-il vrai que si A et B ne sont pas ouverts alors $A \cap B$ ne peut pas être ouvert ? Si oui, faites une démonstration. Si non donnez un contre-exemple.