

Interrogation du 13/12/2004

Corrigé

Exercice I

Soit A un réel. Posons

$$N = \begin{cases} E\left(\sqrt[4]{\ln(A-1)+17}\right) & \text{si } A \geq 2 \\ E(\sqrt[4]{17}) = 2 & \text{si } A < 2 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} n > N &\Rightarrow n > \sqrt[4]{\ln(A-1)+17} && \text{donc} \\ n > N &\Rightarrow n^4 > \ln(A-1)+17 && \text{donc} \\ n > N &\Rightarrow n^4 - 17 > \ln(A-1) && \text{donc} \\ n > N &\Rightarrow \exp(n^4 - 17) > A - 1 && \text{donc} \\ n > N &\Rightarrow 1 + \exp(n^4 - 17) > A && \text{donc} \\ n > N &\Rightarrow u_n > A \end{aligned}$$

ainsi

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow u_n > A$$

donc $\lim u_n = +\infty$.

Exercice II

1. En multipliant par l'expression conjuguée, il vient

$$u_n = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

or $\lim \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$ et $\lim n = +\infty$ donc $\lim(\sqrt{n^2 + 1} + n) = +\infty$ et par suite $\lim u_n = 0$.

2. On a

$$\frac{u_n}{\alpha n^a} = \frac{1}{\alpha n^a(\sqrt{n^2 + 1} + n)} = \frac{1}{\alpha \sqrt{n^{2+2a} + n^{2a} + n^{1+a}}}$$

Si $a = -1$ alors

$$\sqrt{n^{2+2a} + n^{2a}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

donc $\lim \sqrt{n^{2+2a} + n^{2a}} = 1$ et $n^{1+a} = 1$, ainsi

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n^{2+2a} + n^{2a}} + n^{1+a}} = \frac{1}{2}$$

Soit alors $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\lim \frac{\frac{1}{2n}}{u_n} = 1$$

donc

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

3. La suite (u_n) est positive et équivalente à $\frac{1}{2n}$, or la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge puisque c'est une série de Riemann avec $s = 1 \leq 1$. En vertu du théorème d'équivalence, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

diverge.

Exercice III

Soit $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) converge vers l donc

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon'$$

en particulier pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2|l'|}$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2|l'|}$$

La suite (u_n) est convergente donc elle est bornée, notons A un réel strictement positif tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < A$.

La suite (v_n) converge vers l' donc

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, n > N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \varepsilon'$$

en particulier, pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2A}$, il vient

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, n > N_2 \Rightarrow A|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

or $|u_n| < A$ donc

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, n > N_2 \Rightarrow |u_n| |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors

$$n > N \Rightarrow \begin{cases} n > N_1 & \Rightarrow |l'| |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n > N_2 & \Rightarrow |u_n| |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

donc

$$n > N \Rightarrow |l'| |u_n - l| + |u_n| |v_n - l'| < \varepsilon$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n v_n - l' u_n + l' u_n - ll'| \\ &\leq |u_n (v_n - l') + l' (u_n - l)| \\ &\leq |l'| |u_n - l| + |u_n| |v_n - l'| \end{aligned}$$

Ainsi

$$n > N \Rightarrow |u_n v_n - ll'| < \varepsilon$$

Nous avons ainsi établi que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n v_n - ll'| < \varepsilon$$

Donc que $\lim(u_n v_n) = ll'$.