

## Interrogation du 13/12/2004

*Durée de l'épreuve : 1 heure 15*

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

### Exercice I (5 points)

En utilisant la définition de la limite, étudier la limite de  $(u_n)$  définie par  $u_n = 1 + \exp(n^4 - 17)$

### Exercice II (7.5 points)

Considérons  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ .

1. Calculer la limite de  $(u_n)$ .
2. Trouver deux réels  $a$  et  $\alpha$  tels que  $u_n \sim \alpha n^a$ .
3. En déduire la nature de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

### Exercice III (7.5 points)

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes. Notons  $l \in \mathbb{R}$  et  $l' \in \mathbb{R}^*$  leurs limites respectives. En utilisant la définition de la limite, démontrer que

$$\lim(u_n v_n) = ll'$$

on pourra supposer connu qu'une suite convergente est bornée.