

## Examen du 21/04/2005

Corrigé

### Exercice I

1. L'ensemble  $E$  n'est pas un ouvert puisqu'il n'est pas voisinage de  $-2$  qui est pourtant l'un de ses points.

L'ensemble  $E$  n'est pas un fermé puisque son complémentaire dans  $\mathbb{R}$  est  $] -\infty, -2[ \cup ] -2, -1[ \cup \{1\}$  qui n'est pas ouvert (puisque'il n'est pas voisinage de  $1$  qui est pourtant l'un de ses points.)

L'ensemble  $E$  n'est pas compact pour deux raisons : il n'est pas fermé, il n'est pas borné. (L'une des deux suffisait)

2. L'ensemble  $\{-2\} \cup [-1, +\infty[$  est un fermé car c'est la réunion de deux fermés. C'est le plus petit fermé contenant  $E$ . Ainsi

$$\overline{E} = \{-2\} \cup [-1, +\infty[$$

L'ensemble  $] -1, 1[ \cup ] 1, +\infty[$  est un ouvert car c'est la réunion de deux intervalles ouverts. C'est le plus grand ouvert contenu dans  $E$ . Ainsi

$$\overset{\circ}{E} = ] -1, 1[ \cup ] 1, +\infty[$$

3. Pour  $\varepsilon = 1$  on a  $] -2 - \varepsilon, -2 + \varepsilon[ \cap E = \{-2\}$  donc  $-2$  est un point isolé de  $E$ .

En revanche pour  $x \in [-1, +\infty[$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  on a  $] x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ . Ainsi  $[-1, +\infty[ \subset E'$ .

Comme  $(E^*, E')$  forme une partition de  $\overline{E} = \{-2\} \cup [-1, +\infty[$ , il vient

$$\begin{aligned} E^* &= \{-2\} \\ E' &= [-1, +\infty[ \end{aligned}$$

### Exercice II

1. On a  $m + n \geq n$  donc  $\frac{mn}{m+n} \leq m$ . En outre  $mn$  et  $m + n$  sont positifs donc  $\frac{mn}{m+n} \geq 0$ . Il en résulte

$$\frac{mn}{m+n} \in [0, m]$$

en conséquences  $A_m \subset [0, m]$ .

2. On a  $A_0 = \{0\}$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $] 0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[ \not\subset A_0$  donc  $A_0$  n'est pas un ouvert.

On a  $\mathbb{R} \setminus A_0 = ] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$  qui est une réunion d'intervalles ouverts donc un ouvert, ainsi  $A_0$  est un fermé.

3. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  fixé et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{mn}{m+n}$ . Les termes de  $(u_n)$  sont dans  $A_m$  et  $\lim u_n = m \notin A_m$  donc  $m$  est un point adhérent à  $A_m$  qui n'est pas dans  $A_m$ . En conséquence, cet ensemble n'est pas un fermé.

4. Comme  $m$  est adhérent à  $A_m$  sans appartenir à  $A_m$ , c'est un point d'accumulation.

### Exercice III

L'ensemble  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  donc il contient l'élément neutre 0. Comme  $G$  est un ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $] -\varepsilon, \varepsilon[ \subset G$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , posons

$$n = E\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) + 1$$

alors  $n > \frac{|x|}{\varepsilon}$  donc  $\frac{|x|}{n} < \varepsilon$ , par suite  $0 \leq \frac{|x|}{n} < \varepsilon$ . Il en résulte que  $\frac{|x|}{n} \in G$ . L'addition étant définie interne on a

$$n \times \frac{|x|}{n} = \underbrace{\frac{|x|}{n} + \dots + \frac{|x|}{n}}_{n \text{ fois}} \in G$$

ainsi  $|x| \in G$ .

- Si  $x \geq 0$  alors  $x = |x|$  donc  $x \in G$
- Si  $x < 0$  alors  $x = -|x|$  donc  $x$  est l'opposé d'un élément de  $G$ . Or  $G$  est un groupe donc l'opposé d'un élément de  $G$  est dans  $G$ , ainsi  $x \in G$ .

Nous avons montré que  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in G$ . Ainsi  $\mathbb{R} \subset G$ . Comme  $G$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ , il vient

$$G = \mathbb{R}$$

### Exercice IV

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $a \in ]a - \frac{1}{n^p}, a + \frac{1}{n^p}[$  donc  $a \in E_{a,p}$ . Cela démontre que  $\{a\} \subset E_{a,p}$ .

Soit  $x \in E_{a,p}$  et posons  $d = |x - a|$ . Supposons  $x \neq a$  alors  $d > 0$ . Soit

$$N = E\left(\frac{1}{\sqrt[p]{d}}\right) + 1$$

alors  $N > \frac{1}{\sqrt[p]{d}}$  ainsi  $N^p > \frac{1}{d}$  donc  $\frac{1}{N^p} < d$ , il en résulte

$$x \notin \left]a - \frac{1}{N^p}, a + \frac{1}{N^p}\right[$$

donc  $x \notin E_{a,p}$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi  $x \in E_{a,p}$  entraîne  $x = a$ . Cela démontre que  $E_{a,p} \subset \{a\}$ .

On a donc  $E_{a,p} = \{a\}$ .

### Exercice V

Considérons

$A$	$B$	$A \cap B$	$\partial A$	$\partial B$	$(\partial A) \cap (\partial B)$	$\partial(A \cap B)$	Conclusion
$\mathbb{R}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\partial(A \cap B) \not\subset (\partial A) \cap (\partial B)$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$(\partial A) \cap (\partial B) \not\subset \partial(A \cap B)$