

Examen du 21/04/2005

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Le barème est donné à titre indicatif. Les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (4 points)

Soit $E = \{-2\} \cup [-1, 1[\cup]1, +\infty[$

1. L'ensemble E est-il un ouvert ? Un fermé ? Un compact ?
2. Calculer \bar{E} et $\overset{\circ}{E}$?
3. Calculer E' et E^* ?

Exercice II (5 points)

Soit $m \in \mathbb{N}$, on note

$$A_m = \left\{ \frac{mn}{m+n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ et } E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$$

1. Montrer que $A_m \subset [0, m]$.
2. L'ensemble A_0 est-il un ouvert ? Est-il un fermé ?
3. L'ensemble A_m est-il fermé lorsque $m \neq 0$?
4. A-t'on $m \in A'_m$ lorsque $m \neq 0$?

Exercice III (4 points)

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que si G est ouvert alors $G = \mathbb{R}$.

Exercice IV (4 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et

$$E_{a,p} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] a - \frac{1}{n^p}, a + \frac{1}{n^p} \right[$$

Montrer que $E_{a,p}$ est un singleton et dites quel est ce singleton.

Exercice V (3 points)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. Comparer $\partial(A \cap B)$ et $(\partial A) \cap (\partial B)$