Examen du 2/02/2005

Corrigé

Exercice I

On a

$$\frac{2^n \ln n}{(-2)^n \sqrt{n}} = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

Posons $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

- *i)* (b_n) est décroissante à partir du rang 8 puisque $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ a pour dérivée $t \mapsto \frac{2-\ln t}{2t\sqrt{t}}$ qui est négative pour $t \geq 8$.
- *ii)* (b_n) est positive (quotient de quantités positives)
- *iii)* $\lim b_n = 0$
- *iv)* Pour tout p et q entiers avec $q \geq p$ on a $\sum_{n=p}^{q} (-1)^n \in \{-1, 0, 1\}$ donc $\left|\sum_{n=p}^{q} (-1)^n\right| \leq 1$.

Le théorème d'Abel s'applique et donne la convergence de la série.

Exercice II

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{1}{1+n} + \frac{1}{n}\right) &= -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\
&= -\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

On a $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$ donc

$$S_{-1,1} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{1}{1+n} + \frac{1}{n}\right) = 1$$

2. Posons

$$u_n = \frac{a}{1+n} + \frac{b}{n}$$

alors

$$u_n = \frac{(a+b)n + b}{n(n+1)}$$

Distinguons plusieurs cas

- Si $a=-b$ alors
$$u_n = b\frac{1}{n(n+1)}$$
Or
$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$$
dont la série associée est convergente. Comme ces deux séries sont positives, le théorème d'équivalence permet d'affirmer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$
converge. Par suite $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

- Si $a \neq -b$ alors
$$u_n = (a+b)\frac{n+\frac{b}{a+b}}{n(n+1)}$$
Or
$$\frac{n+\frac{b}{a+b}}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n}$$
dont la série associée est divergente. Comme ces deux séries sont positives à partir d'un certain rang, le théorème d'équivalence permet d'affirmer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\frac{b}{a+b}}{n(n+1)}$$
diverge. Par suite $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Conclusion : la série converge si et seulement si $a=-b$.

Exercice III

Soit $n \geq 2$ un entier et k et N deux entiers tels que $N > k \geq n$.
$$\forall x \in [k, k+1],\ \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{k^2}$$
ainsi
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}dx$$
donc
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \tag{1}$$
par suite
$$\sum_{k=n-1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n-1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2}$$
donc
$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{dx}{x^2}$$

donc
$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq -\frac{1}{N} + \frac{1}{n-1}$$
ainsi, lorsque N tend vers $+\infty$ il vient
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}$$
L'autre partie de l'inégalité se montre de manière analogue, (1) donne
$$\sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$$
donc
$$\int_n^{N+1} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$$
donc
$$-\frac{1}{N+1} + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$$
ainsi, lorsque N tend vers $+\infty$ il vient
$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$
ce qui démontre l'autre partie de l'inégalité. On a donc
$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}$$

Exercice IV

1. Supposons $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et notons (P_n) la proposition "u_n est bien définie et $u_n \neq 0$".

- Puisque $u_0 \in \mathbb{R}^*$, la proposition (P_0) est vraie.
- Supposons (P_n) vraie alors $\frac{a}{u_n}$ est bien définie donc u_{n+1} est bien définie. En outre
$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a}{u_n} \neq 0$$
donc (P_{n+1}) est vraie.

La suite (u_n) est donc bien définie.

2. Soit f l'application définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2x}$, le réel e est un équilibre de la relation de récurrence si et seulement si $e = f(e)$, c'est-à-dire
$$e^2 = a$$
ce qui équivaut à $e = -\sqrt{a}$ ou $e = \sqrt{a}$. Les deux équilibres sont donc $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

En outre, f est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$, ainsi
$$f'(-\sqrt{a}) = f'(\sqrt{a}) = 0$$
donc les deux équilibres trouvés sont stables.

3. L'étude de la dérivée de la fonction f, introduite à la question précédente, permet d'établir le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{a}$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi $f(x) \geq \sqrt{a}$ lorsque $x > 0$ et $f(x) \leq -\sqrt{a}$ si $x < 0$. Donc $f(x)^2 \geq a$, par suite $u_n^2 = f(u_{n-1})^2 \geq a$, ainsi $u_n^2 - a \leq 0$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(-u_n + \frac{a}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{u_n^2 - a}{-u_n}$$

donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $-u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n u_{n+1} = u_n^2 + a > 0$ donc u_{n+1} est du signe de u_n. Une récurrence immédiate établit que tous les termes de (u_n) sont du signe de u_0.

Ainsi $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $-u_0$. Il en résulte que (u_n) est croissante si $u_0 < 0$ et décroissante si $u_0 > 0$.

4. Si $u_0 > 0$ alors (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente dans $\mathbb{R}^+$. Comme $\sqrt{a}$ est le seul équilibre dans $\mathbb{R}^+$ la suite (u_n) a pour limite $\sqrt{a}$.

De manière analogue, si $u_0 < 0$ alors (u_n) a pour limite $-\sqrt{a}$.