Pôle Universitaire Léonard de Vinci | S1 – Année 2004-2005
CS 103 – Analyse I | Promotion ESILV 2009

Examen du 2/02/2005

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (4 points)

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \ln n}{(-2)^n \sqrt{n}}$$

Exercice II (6 points)

Soit a et b deux réels. On considére la série

$$S_{a,b} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{1+n} + \frac{b}{n}$$

1. Calculer la valeur de $S_{-1,1}$.

2. Discuter selon a et/ou b la convergence de $S_{a,b}$.

Exercice III (4 points)

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}$$

Exercice IV (6 points)

Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$. On considère la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

1. Montrer que si $u_0 \in \mathbb{R}^*$ alors (u_n) est bien définie.

2. Déterminer les équilibres de la relation de recurrence et leur nature.

3. Montrer que (u_n) est croissante si $u_0 < 0$ et décroissante si $u_0 > 0$.

4. En déduire $\lim u_n$.