

Devoir 4

Corrigé

Exercice I

1. On a $m + n \geq n$ donc $\frac{mn}{m+n} \leq m$. En outre mn et $m + n$ sont positifs donc $\frac{mn}{m+n} \geq 0$. Il en résulte

$$\frac{mn}{m+n} \in [0, m]$$

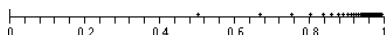
en conséquences $A_m \subset [0, m]$.

2. On a $A_0 = \{0\}$.

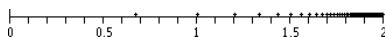
Pour tout $\varepsilon > 0$, $]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[\not\subset A_0$ donc A_0 n'est pas un ouvert.

On a $\mathbb{R} \setminus A_0 =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ qui est une réunion d'intervalles ouverts donc un ouvert, ainsi A_0 est un fermé.

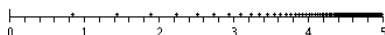
3. L'ensemble A_1 est représenté ci-dessous



L'ensemble A_2 est représenté ci-dessous



L'ensemble A_5 est représenté ci-dessous



4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé et (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{mn}{m+n}$. Les termes de (u_n) sont dans A_m et $\lim u_n = m \notin A_m$ donc m est un point adhérent à A_m qui n'est pas dans A_m . En conséquence, cet ensemble n'est pas un fermé.

5. Comme¹ m est adhérent à A_m sans appartenir à A_m , c'est un point d'accumulation.

Exercice II

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on a montré dans l'exercice I question 5, que m est un point d'accumulation de A_m , ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\cap (A_m \setminus \{m\}) \neq \emptyset$$

Or $A_m \setminus \{m\} \subset E \setminus \{m\}$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\cap (E \setminus \{m\}) \neq \emptyset$$

donc m est un point d'accumulation de E .

¹La réciproque est fautive : il ne faut pas croire que si x est adhérent à A et appartient à A alors forcément ce n'est pas un point d'accumulation. Par exemple 2 est adhérent à $[0, 2]$ et est un point d'accumulation.

2. Soit $x \in]-\infty, 0[$ alors x n'est pas un point d'accumulation de E . En effet pour $\varepsilon = |x|$ on a $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (E \setminus \{x\}) = \emptyset$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Comme $x \notin \mathbb{N}$ on a $d > 0$.

a. Soit $m \leq E(x)$. En vertu de la question 1 de l'exercice I on a $A_m \subset [0, m]$ donc

$$A_m \subset [0, E(x)]$$

or $x - d > E(x)$ donc

$$]x - d, x + d[\cap [0, E(x)] = \emptyset$$

et par suite $A_m \cap]x - d, x + d[= \emptyset$.

b. Soit $m \geq E(x) + 1$. On a $m - (x - d) > 0$ et $m - (x + d) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{mn}{m+n} \in]x - d, x + d[&\iff x - d < \frac{mn}{m+n} < x + d \\ &\iff (x - d)(m + n) < mn < (x + d)(m + n) \\ &\iff \begin{cases} (x - d)(m + n) < mn \\ mn < (x + d)(m + n) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (m - (x - d))n > (x - d)m \\ (m - (x + d))n < (x + d)m \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n > \frac{(x - d)m}{m - (x - d)} \\ n < \frac{(x + d)m}{m - (x + d)} \end{cases} \\ &\iff n \in \left] \frac{(x - d)m}{m - (x - d)}, \frac{(x + d)m}{m - (x + d)} \right[\end{aligned}$$

L'ensemble

$$\left] \frac{(x - d)m}{m - (x - d)}, \frac{(x + d)m}{m - (x + d)} \right[\cap \mathbb{N}$$

est une partie bornée de \mathbb{N} il est donc fini (peut-être vide). Ainsi $A_m \cap]x - d, x + d[$ est fini.

c. On a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(x + d)m}{m - (x + d)} = x + d$$

donc

$$\exists M_1 \in \mathbb{N}, m > M_1 \Rightarrow \left| \frac{(x + d)m}{m - (x + d)} - (x + d) \right| < d$$

par suite

$$\exists M_1 \in \mathbb{N}, m > M_1 \Rightarrow \frac{(x + d)m}{m - (x + d)} < x + 2d$$

de même

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(x - d)m}{m - (x - d)} = x - d$$

donc

$$\exists M_2 \in \mathbb{N}, m > M_2 \Rightarrow \left| \frac{(x - d)m}{m - (x - d)} - (x - d) \right| < d$$

par suite

$$\exists M_2 \in \mathbb{N}, m > M_2 \Rightarrow \frac{(x - d)m}{m - (x - d)} > x - 2d$$

Notons $M = \max\{M_1, M_2\}$ alors

$$m > M \Rightarrow \left] \frac{(x-d)m}{m-(x-d)}, \frac{(x+d)m}{m-(x+d)} \right[\subset]x-2d, x+2d[$$

or $]x-2d, x+2d[\cap \mathbb{N} = \emptyset$ donc pour tout $m > M$

$$\left] \frac{(x-d)m}{m-(x-d)}, \frac{(x+d)m}{m-(x+d)} \right[\cap \mathbb{N} = \emptyset$$

4. Il résulte de la question précédente que pour tout $m > M$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{mn}{m+n} \notin]x-d, x+d[$$

par suite $A_m \cap]x-d, x+d[= \emptyset$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} E \cap]x-d, x+d[&= \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) \cap]x-d, x+d[\\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (A_m \cap]x-d, x+d[) \\ &= \bigcup_{m \in \llbracket \mathbb{E}(x), M \rrbracket} (A_m \cap]x-d, x+d[) \end{aligned}$$

Or $\llbracket \mathbb{E}(x), M \rrbracket$ et $A_m \cap]x-d, x+d[$ sont des ensembles finis donc $E \cap]x-d, x+d[$ est un ensemble fini. L'ensemble $\{|x-y|, y \in]x-d, x+d[\cap E \setminus \{x\}\}$ est fini, il admet un plus petit élément ε . Par suite

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap E \setminus \{x\} = \emptyset$$

donc $x \notin E'$.

On a $n \geq 1$ donc $mn \geq m$. Si $m \geq 1$ alors $mn \geq n$ donc $2mn \geq m+n$ et donc $\frac{mn}{m+n} \geq \frac{1}{2}$. Par suite $]0 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}[\cap E = \{0\}$ donc 0 est un point isolé. Ainsi $0 \notin E'$

Par suite, $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \not\subset E'$. Il résulte de la question 2 que $]0, -\infty[\not\subset E'$ donc $E' \subset \mathbb{N}$. En vertu de la question 1, on a $E' = \mathbb{N}$.

Exercice III

1. L'ensemble E est inclus dans \mathbb{Q} donc $\forall \varepsilon > 0,]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[\not\subset E$ donc E n'est pas voisinage de 0 qui est l'un de ses points donc E n'est pas ouvert.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$, alors

$$p = \frac{p(p+1)^2}{p(p+1) + (p+1)} = \frac{mn}{m+n}$$

avec $m = p(p+1) \in \mathbb{N}$ et $n = p+1 \in \mathbb{N}^*$. On a donc $p \in E$.

Par suite $\mathbb{N} \subset E$.

3. On a $E' \subset E$ donc $\overline{E'} \subset E$. Ainsi $E = \overline{E}$ donc E est un fermé.