Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2004-2005
Promotion ESILV 2009

Devoir 3

Corrigé

Exercice I

1. Soit (u_n) et (v_n) deux éléments de $E_{\alpha,\beta,\gamma,0}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n &= 0 & (2) \\ \alpha v_{n+2} + \beta v_{n+1} + \gamma v_n &= 0 & (3) \end{aligned}$$

En multipliant (3) par λ et en ajoutant (2), il vient

$$\alpha(u_{n+2} + \lambda v_{n+2}) + \beta(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + \gamma(u_n + \lambda v_n) = 0$$

ainsi $(u_n) + \lambda(n_n) \in E_{\alpha,\beta,\gamma,0}$. En outre $E_{\alpha,\beta,\gamma,0} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et il est non vide puisqu'il contient la suite constante égale à 0. L'ensemble $E_{\alpha,\beta,\gamma,0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit (u_n) un élément de $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, alors

$$\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n + \delta = 0 \tag{4}$$

Si $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est un espace vectoriel alors $\frac{1}{2}(u_n) \in E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, c'est-à-dire

$$\alpha\frac{1}{2}u_{n+2} + \beta\frac{1}{2}u_{n+1} + \gamma\frac{1}{2}u_n + \delta = 0$$

donc

$$\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n + 2\delta = 0 \tag{5}$$

En faisant la différence entre (4) et (5), il vient $\delta = 0$. Par contraposition : si $\delta \neq 0$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ n'est pas un espace vectoriel.

Exercice II

1. L'equation (1) équivaut à

$$\beta u_{n+1} + \gamma u_n = 0 \tag{6}$$

- Si $\beta = 0$ alors
  - Si $\gamma = 0$ alors (6) est toujours satisfaite. On a $E_{0,0,0,0} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  - Si $\gamma \neq 0$ alors (6) équivaut à $u_n = 0$, l'ensemble $E_{0,0,\gamma,0}$ est le singleton contenant la suite identiquement nulle.
- Si $\beta \neq 0$ alors (6) est équivalente à

  $$u_{n+1} = -\frac{\gamma}{\beta}u_n$$

  il s'agit d'une suite géomtétrique de raison $-\frac{\gamma}{\beta}$, ainsi

  $$E_{0,\beta,\gamma,0} = \left\{(u_n) \mid u_n = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)^n u_0,\ u_0 \in \mathbb{R}\right\}$$

2. L'equation (1) équivaut à

$$\beta u_{n+1} + \gamma u_n + \delta = 0 \tag{7}$$

- Si $\beta = 0$ alors
  - Si $\gamma = 0$ alors (6) équivaut à $\delta = 0$ ce qui est contraire aux hypothéses. Donc (6) n'est jamais satisfaite. On a $E_{0,0,0,\delta} = \emptyset$.
  - Si $\gamma \neq 0$ alors (6) équivaut à $\gamma u_n + \delta = 0$, l'ensemble $E_{0,0,\gamma,\delta}$ est le singleton contenant la suite constante égale à $-\frac{\delta}{\gamma}$.
- Si $\beta \neq 0$ alors (6) est équivalente à

$$u_{n+1} = -\frac{\gamma}{\beta} u_n - \frac{\delta}{\beta}$$

  - Si $\gamma = -\beta$ alors (6) équivaut à $u_{n+1} = u_n - \frac{\delta}{\beta}$, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{\delta}{\beta}$ ainsi

$$E_{0,\beta,\gamma,0} = \left\{ (u_n) \mid u_n = u_0 - n\frac{\delta}{\beta},\ u_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

  - Si $\gamma \neq -\beta$, posons $v_n = u_n + a$ il vient

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} + a \\ & = & -\frac{\gamma}{\beta} u_n - \frac{\delta}{\beta} + a \\ & = & -\frac{\gamma}{\beta}(v_n - a) - \frac{\delta}{\beta} + a \\ & = & -\frac{\gamma}{\beta} v_n - \frac{\delta}{\beta} + a(1 + \frac{\gamma}{\beta}) \end{array}$$

    Posons

$$a = \frac{\delta}{\beta + \gamma}$$

    alors $v_{n+1} = -\frac{\gamma}{\beta} v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 + a$ et de raison $-\frac{\gamma}{\beta}$ donc

$$v_n = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)^n (u_0 + a) = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)^n \left(u_0 + \frac{\delta}{\beta + \gamma}\right)$$

    par suite

$$E_{0,\beta,\gamma,\delta} = \left\{ (u_n) \mid u_n = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)^n \left(u_0 + \frac{\delta}{\beta+\gamma}\right) - \frac{\delta}{\beta+\gamma},\ u_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice III

L'équation (1) équivaut à

$$u_{n+2} + \frac{\beta}{\alpha} u_{n+1} + \frac{\gamma}{\alpha} u_n = 0$$

ce qui équivaut à

$$u_{n+1} + \frac{\beta}{\alpha} u_n + \frac{\gamma}{\alpha} u_{n-1} = 0$$

ce qui équivaut à

$$u_{n+1} = -\frac{\beta}{\alpha}u_n - \frac{\gamma}{\alpha}u_{n-1}$$

Cette suite est une suite linéaire homogène du second ordre. Appliquons les résultats du cours pour déterminer le terme général de la suite. Le réel $\Delta = \frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}$ est du signe de $\beta^2 - \alpha\gamma$.

- Si $\beta^2 > \alpha\gamma$ alors

$$E_{\alpha,\beta,\gamma,0} = \left\{(u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^n + B\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^n,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si $\beta^2 = \alpha\gamma$ alors

$$E_{\alpha,\beta,\gamma,0} = \left\{(u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^n + Bn\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^n,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si $\beta^2 < \alpha\gamma$ alors

$$E_{\alpha,\beta,\gamma,0} = \left\{(u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta - i\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right)^n + B\left(\frac{\beta + i\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right)^n,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice IV

1.

a. La suite (u_n) constante égale à k satisfait (1) si et seulement si $\alpha k + \beta k + \gamma k + \delta = 0$, c'est-à-dire

$$k = -\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma}$$

b. La suite (u_n) satisfait (1) si et seulement si

$$u_n = v_n - \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma}$$

avec (v_n) satisfaisant

$$\alpha v_{n+2} + \beta v_{n+1} + \gamma u_n = 0$$

L'exercice III permet d'expliciter le terme général de (v_n). Si $\beta^2 > \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{(u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^n + B\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^n - \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Si $\beta^2 = \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{(u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^n + Bn\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^n - \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Si $\beta^2 < \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{(u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta - i\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right)^n + B\left(\frac{\beta + i\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\right)^n - \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

2.

a. Une suite (u_n) arithmétique de raison r satisfait (1) si et seulement si

$$\alpha(u_0 + (n+2)r) + \beta(u_0 + (n+1)r) + \gamma(u_0 + nr) + \delta = 0$$

si et seulement si

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u_0 + nr) + 2\alpha r + \beta r + \delta = 0$$

si et seulement si

$$2\alpha r + \beta r + \delta = 0$$

si et seulement si

$$r(2\alpha + \beta) = -\delta$$

si et seulement si

$$r = -\frac{\delta}{2\alpha + \beta}$$

Ainsi la suite $u_n = -\frac{\delta}{2\alpha+\beta} n$ satisfait (1).

b. On raisonne de manière analogue à la question 1. La suite (u_n) satisfait (1) si et seulement si $u_n = v_n - \frac{\delta n}{2\alpha+\beta}$ avec (v_n) satisfaisant

$$\alpha v_{n+2} + \beta v_{n+1} + \gamma u_n = 0$$

L'exercice III permet d'expliciter le terme général de (v_n). Si $\beta^2 > \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{ (u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^n + B\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^n - \frac{\delta n}{2\alpha + \beta},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Si $\beta^2 = \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{ (u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^n + Bn\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^n - \frac{\delta n}{2\alpha + \beta},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Si $\beta^2 < \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{ (u_n) \mid u_n = A\left(\frac{\beta - i\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}\right)^n + B\left(\frac{\beta + i\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha}\right)^n - \frac{\delta n}{2\alpha + \beta},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3.

a. Une suite (u_n) telle que $u_n = \lambda u_n^2$ satisfait (1) si et seulement si

$$\alpha\lambda(n+2)^2 + \beta\lambda(n+1)^2 + \gamma\lambda n^2 + \delta = 0$$

si et seulement si

$$\alpha\lambda(n^2 + 4n + 4) + \beta\lambda(n^2 + 2n + 1) + \gamma\lambda n^2 + \delta = 0$$

si et seulement si

$$(\alpha + \beta + \gamma)\lambda n^2 + (2\alpha + \beta)\lambda(2n + 1) + 4\alpha\lambda + \beta\lambda + \delta = 0$$

si et seulement si

$$(4\alpha + \beta)\lambda + \delta = 0$$

si et seulement si

$$2\alpha\lambda + \delta = 0$$

si et seulement si

$$\lambda = -\frac{\delta}{2\alpha}$$

b. On raisonne de manière analogue à la question 1. La suite (u_n) satisfait (1) si et seulement si $u_n = v_n - \frac{\delta}{2\alpha} n^2$ avec (v_n) satisfaisant

$$\alpha v_{n+2} + \beta v_{n+1} + \gamma u_n = 0$$

L'exercice III permet d'expliciter le terme général de (v_n). Si $\beta^2 > \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{ (u_n) \mid u_n = A \left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{2\alpha} \right)^n + B \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{2\alpha} \right)^n - \frac{\delta}{2\alpha} n^2,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Si $\beta^2 = \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{ (u_n) \mid u_n = A \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^n + Bn \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^n - \frac{\delta}{2\alpha} n^2,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Si $\beta^2 < \alpha\gamma$ alors $E_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ est égal à

$$\left\{ (u_n) \mid u_n = A \left(\frac{\beta - i\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha} \right)^n + B \left(\frac{\beta + i\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha} \right)^n - \frac{\delta}{2\alpha} n^2,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$