Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2004-2005
Promotion ESILV 2009

Devoir 2

Corrigé

Exercice I

1. La fonction ψ est une somme de fonctions dérivables sur $[0;1]$. Sa dérivée est

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

Comme $x \geq 0$ on a $1+x \geq 1$ donc $(1+x)^2 \geq 1+x$, par suite

$$\frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+x}$$

ainsi $\psi' \geq 0$ donc ψ est croissante sur $[0;1]$. En outre $\psi(0) = 0$ donc $\psi \geq 0$ sur $[0;1]$.

Considérons la fonction θ définie sur $[0;1]$ par $\theta(x) = \psi(x) - \frac{1}{2}x^2$. Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

$$\theta'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} - x = -\frac{x^2(2+x)}{(1+x)^2}$$

Ainsi $\theta' \leq 0$ sur $[0;1]$ donc θ est décroissante. En outre $\theta(0) = 0$ donc $\theta \leq 0$ sur $[0;1]$.

Il en résulte

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq \psi(x) \leq \frac{1}{2}x^2$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
u_n - u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln(n+1) \\
&= -\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= -\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \psi\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n} \in]0;1]$, la question précédente permet d'affirmer que

$$0 \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2}$$

3. On a

- Le terme général de la série $u_n - u_{n+1}$ est positif
- Le terme général de la série $u_n - u_{n+1}$ est majoré par $\frac{1}{2n^2}$
- La série $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge puisque $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $s = 2 > 1$.

En vertu du théorème de comparaison,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+1})$$

converge.

4. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=2}^{n} u_k - \sum_{k=2}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=2}^{n-1} u_k \\ &= u_2 + \sum_{k=2}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=2}^{n-1} u_k \\ &= u_2 - \sum_{k=2}^{n-1}(u_k - u_{k+1}) \end{aligned}$$

La question précdente permet d'affirmer que $\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+1})$ converge, comme u_2 est une constante, la suite (u_n) converge également.

Exercice II

1. La fonction φ_k est dérivable sur $[k, k+1]$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \varphi_k'(x) &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{k(k+1) - x^2}{k(k+1)x^2} \\ &= \frac{(\sqrt{k(k+1)} - x)(\sqrt{k(k+1)} + x)}{k(k+1)x^2} \end{aligned}$$

On a

$$k \leq \sqrt{k(k+1)} \leq k+1$$

Ainsi $\varphi_k'(x) \geq 0$ sur $[k, \sqrt{k(k+1)}]$ et $\varphi_k'(x) \leq 0$ sur $[\sqrt{k(k+1)}, k+1]$. Donc φ_k est croissante sur $[k, \sqrt{k(k+1)}]$ et décroissante sur $[\sqrt{k(k+1)}, k+1]$. Comme

$$\varphi_k(k) = \varphi_k(k+1) = 0$$

on en déduit que $\varphi_k(x) \geq 0$ pour tout $x \in [k, k+1]$.

2. Soit $x \in [k, k+1]$ alors
$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x}$$
d'autre part la question précédente donne
$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right)(x-k)$$
Ainsi
$$\forall x \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)(x-k)$$
Ainsi
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)(x-k)\right)\, dx$$
donc
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\frac{1}{2}((k+1)^2 - k^2 - 2k)$$
donc
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$
donc
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right)$$

3. Soit $n \geq 2$ un entier. L'inégalité précédente est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ donc
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right)$$
donc
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1) - \ln k) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
donc
$$-1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
donc
$$-1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n}$$
donc
$$-1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n}$$
donc
$$-1 \leq -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$
donc
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq u_n \leq 1$$
Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, il vient
$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$$

Exercice III

1. Soit f l'application définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \psi(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} - x + 2x^2 = \frac{x^3(3+2x)}{(1+x)^2} \geq 0$$

donc f est croissante. En outre $f(0) = 0$ donc $f \geq 0$. Ainsi

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$$

Il en résulte l'inégalité à démontrer.

2. Soit $n \geq 2$ un entier et k et N deux entiers tels que $N > k \geq n$.

$$\forall x \in [k, k+1],\ \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

ainsi

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dx$$

donc

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \tag{1}$$

par suite

$$\sum_{k=n-1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n-1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{dx}{x^2}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq -\frac{1}{N} + \frac{1}{n-1}$$

ainsi, lorsque N tend vers $+\infty$ il vient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}$$

L'autre partie de l'inégalité se montre de manière analogue, (1) donne

$$\sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$$

donc

$$\int_n^{N+1} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$$

donc

$$-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{n}\leq\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}$$

ainsi, lorsque N tend vers $+\infty$ il vient

$$\frac{1}{n}\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

ce qui démontre l'autre partie de l'inégalité. On a donc

$$\frac{1}{n}\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n-1}$$

3. Soit $n\geq 2$ un entier et k et N deux entiers tels que $N>k\geq n$.

$$\forall x\in[k,k+1],\ \frac{1}{(k+1)^3}\leq\frac{1}{x^3}\leq\frac{1}{k^3}$$

ainsi

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^3}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^3}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{k^3}dx$$

donc

$$\frac{1}{(k+1)^3}\leq\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^3}\leq\frac{1}{k^3}$$

par suite

$$\sum_{k=n-1}^{N-1}\frac{1}{(k+1)^3}\leq\sum_{k=n-1}^{N-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^3}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^3}\leq\int_{n-1}^{N}\frac{dx}{x^3}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^3}\leq-\frac{1}{2N^2}+\frac{1}{2(n-1)^2}$$

ainsi, lorsque N tend vers $+\infty$ il vient

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}\leq\frac{1}{2(n-1)^2}$$

4. Soit $k\geq 2$ un entier, la question 1 donne

$$\frac{1}{2k^2}-\frac{2}{3k^3}\leq u_k-u_{k+1}\leq\frac{1}{2k^2}$$

Soit $n\geq 2$ et $N>n$ deux entiers alors

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{2k^2}-\sum_{k=n}^{N}\frac{2}{3k^3}\leq\sum_{k=n}^{N}(u_k-u_{k+1})\leq\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{2k^2}$$

ainsi

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}-\frac{2}{3}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^3}\leq\sum_{k=n}^{N}(u_k-u_{k+1})\leq\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}$$

or

$$\sum_{k=n}^{N}(u_k-u_{k+1})=\sum_{k=n}^{N}u_k-\sum_{k=n}^{N}u_{k+1}=\sum_{k=n}^{N}u_k-\sum_{k=n+1}^{N+1}u_k=u_n-u_{N+1}$$

d'autre part la question 2 donne

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{2(n-1)}$$

et les questions 2 et 3 donnent

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{3(n-1)^2}\leq\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}-\frac{2}{3}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^3}$$

ainsi

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{3(n-1)^2}\leq u_n-u_{N+1}\leq\frac{1}{2(n-1)}$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, il vient

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{3(n-1)^2}\leq u_n-\gamma\leq\frac{1}{2(n-1)}$$

5. En prenant $n=5001$ on a $\frac{1}{2(n-1)}=10^{-4}$ et $\frac{1}{2n}-\frac{1}{3(n-1)^2}>0$ ainsi $|u_{5001}-\gamma|\leq 10^{-4}$. Le calcul de u_{5001} donne une valeur approchée de γ à 10^{-4} près. Ce calcul peut se programmer, par exemple, avec Excel (voir la feuille de calcul disponible en ligne). On a

$$\gamma\simeq 0.5773$$

Cette constante γ est appelée constante d'Euler :

$$0.57721566490153286060651209008240243104215933593992...$$

A ce jour, on ne sait pas si $\gamma\in\mathbb{Q}$ ou $\gamma\notin\mathbb{Q}$.