Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2004-2005
Promotion ESILV 2009

Devoir 1

corrigé

Exercice I

1. La suite (u_n) converge vers l, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

En particulier lorsque $\varepsilon = 1$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N_0 \Rightarrow |u_n - l| < 1$$

c'est-à-dire u_n est minoré par $l - 1$ et majoré par $l + 1$ à partir du rang N_0.

2. Soit N_0 l'entier défini dans la question 1. Notons

$$E = \{u_n,\ n \in [\![1, N_0]\!]\}$$

Cet ensemble a au plus N_0 éléments. Comme il est fini, il admet un plus grand élément M et un plus petit élément m.

Soit $n \in \mathbb{N}$, si $n \leq N_0$ alors $u_n \in [m, M]$ donc u_n est borné. Si $n > N_0$ alors $u_n \in]l - 1, l + 1[$ donc u_n est borné. La suite (u_n) est donc bornée.

Remarque : on se gardera bien de croire que la réciproque est vraie. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ fourni un contre-exemple.

Exercice II

1. Si $l' = 0$ alors le résultat est trivial. Supposons désormais que $l' \neq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) converge vers l donc

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon' \tag{1}$$

en particulier pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2|l'|}$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2|l'|}$$

La proposition précédente est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in N,\ n > N_1 \Rightarrow |l'|\,|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On remarquerea que N_1 est une variable muette et peut être remplacée par N.

2. La suite (u_n) est convergente. En vertu de l'exercice I elle est donc bornée, notons A un réel strictement positif tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| < A$.

Soit $\varepsilon > 0$, la suite (v_n) converge vers l' donc

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ n > N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \varepsilon'$$

en particulier, pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2A}$, il vient

$$\exists N_2 \in N,\ n > N_2 \Rightarrow A\,|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

or $|u_n| < A$ donc

$$\exists N_2 \in N,\ n > N_2 \Rightarrow |u_n|\,|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Cette proposition est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in N,\ n > N_2 \Rightarrow |u_n|\,|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On remarquerea que N_2 est une variable muette et peut être remplacée par N.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Dans le deux questions précédentes nous avons établi l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned} n > N_1 \quad &\Rightarrow \quad |l'|\,|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n > N_2 \quad &\Rightarrow \quad |u_n|\,|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors

$$n > N \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} n > N_1 & \Rightarrow & |l'|\,|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n > N_2 & \Rightarrow & |u_n|\,|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

donc

$$n > N \Rightarrow |l'|\,|u_n - l| + |u_n|\,|v_n - l'| < \varepsilon \tag{2}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n v_n - l'u_n + l'u_n - ll'| \\ &\leq |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \\ &\leq |l'|\,|u_n - l| + |u_n|\,|v_n - l'| \end{aligned} \tag{3}$$

Ainsi (1) et (2) donnent

$$n > N \Rightarrow |u_n v_n - ll'| < \varepsilon$$

Nous avons ainsi établi que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |u_n v_n - ll'| < \varepsilon$$

Donc que $\lim(u_n v_n) = ll'$.

Exercice III

Dans cet exercice nous allons réutiliser les idées de l'exercice II en les adaptant au suites de Cauchy. Le point central est

$$\begin{aligned} |w_q - w_p| &= |u_q v_q - u_p v_p| \\ &\leq |u_q v_q - u_q v_p + u_q v_p - u_p v_p| \\ &\leq |u_q(v_q - v_p) + v_p(u_q - u_p)| \\ &\leq |u_q|\,|v_q - v_p| + |v_p|\,|u_q - u_p| \end{aligned} \tag{4}$$

Cette égalité est l'*alter ego* de (3).

Première étape : Majorons $|u_q|$ et $|v_p|$ (sans utiliser la convergence de ces suites et donc sans utiliser directement l'exercice I).

Comme (u_n) est de Cauchy, la définition dans le cas particulier $\varepsilon = 1$ donne

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N_1 \Rightarrow |u_q - u_p| < 1$$

Donc, en particulier

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ q \geq N_1 \Rightarrow |u_q - u_{N_1}| < 1$$

Pour $q \geq N_1$ il vient

$$u_{N_1} - 1 < u_q < u_{N_1} + 1$$

Posons $A = \max\{|u_{N_1} + 1|, |u_{N_1} - 1|\}$ si bien que $|u_q| \leq A$. On a ainsi

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \exists A \in \mathbb{R}^{+*},\ q \geq N_1 \Rightarrow |u_q| < A \tag{5}$$

De manière analogue

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \exists B \in \mathbb{R}^{+*},\ q \geq N_2 \Rightarrow |v_q| < B$$

et comme la variable q est muette, il vient

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \exists B \in \mathbb{R}^{+*},\ p \geq N_2 \Rightarrow |v_p| < B \tag{6}$$

Deuxième étape : Majorons $|w_q - w_p|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N_3 \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N_3 \Rightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon'$$

En particulier pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2B}$ il vient

$$\exists N_3 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N_3 \Rightarrow |u_q - u_p| B < \frac{\varepsilon}{2}$$

De manière analogue

$$\exists N_4 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N_4 \Rightarrow |v_q - v_p| A < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit maintenant $N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$, on a

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |u_q| < A \\ |v_p| < B \\ |u_q - u_p| B < \frac{\varepsilon}{2} \\ |v_q - v_p| A < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

ainsi

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |v_p|\,|u_q - u_p| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |u_q|\,|v_q - v_p| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

donc

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N \Rightarrow |v_p|\,|u_q - u_p| + |u_q|\,|v_q - v_p| < \varepsilon$$

L'inégalité (4) donne

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N \Rightarrow |w_q - w_p| < \varepsilon$$

si bien que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N \Rightarrow |w_q - w_p| < \varepsilon$$

ainsi (w_q) est de Cauchy.