Correction des exercices de la feuille 9

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice II

1. L'ensemble A n'est pas fermé puisque $v_n = \sin(\frac{1}{4n})$ est une suite d'éléments de A (c'est la suite extraite des termes divisibles par 4 de (u_n)) qui converge vers $0 \notin A$.

L'ensemble A n'est pas ouvert puisqu'il contiendrait un intervalle ouvert alors que A est dénombrable.

L'ensemble A n'est pas compact puisqu'il n'est pas fermé.

2. L'ensemble A est borné donc $\overline{A}$ est borné, comme il est infini (puisque A est infini lui-même) il admet un point d'accumulation, en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass.

3. — Question difficile —

Comme A est dénombrable $\mathring{A} = \emptyset$.

Considérons les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned} x_n &= \sin\left(\frac{1}{2n+2}\right) \\ y_n &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n+1}\right) \\ z_n &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4n+3}\right) \end{aligned}$$

Ces suites convergent respectivement vers 0, 1 et -1. Soit (v_n) une suite convergente d'éléments de A, il résulte de Cauchy que (v_n) est soit constante soit une sous suite de (x_n), (y_n) ou (z_n) à partir d'un certain rang. Dans le premier cas elle converge vers un élément de A, dans l'autre elle converge vers un élément de $\{-1, 0, 1\}$. Par suite $\overline{A} = A \cup \{-1, 0, 1\}$.

La frontière de A est $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \cup \{-1, 0, 1\}$

Tous les points de A sont isolés, sinon il existerait une suite d'éléments de A non constante convergent vers ce point. Ainsi $A^* = A$ et $A' = \{-1, 0, 1\}$.

Exercice III

1. Une suite d'éléments d'un ensemble sans point d'accumulation peut être convergente si elle est constante.

2. L'ensemble des termes d'une suite convergente n'admet pas toujours un point d'accumulation, par exemple si la suite est constante, l'ensemble des termes de la suite est un singleton.

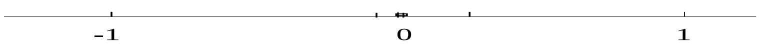
Si la suite n'est pas constante alors l'ensemble A des termes de la suite ne peut pas être fini car Cauchy serait contredit en prenant ε inféfieur à la distance maximale entre deux points.

Ainsi A est infini. Comme la suite converge, elle est bornée donc A est borné. Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet de conclure que $A' \neq \emptyset$.

Si A admet au moins deux points d'accumulations alors il existe deux sous-suite convergent vers des valeurs différentes, donc la suite n'est pas convergente ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi A admet un seul point d'accumulation.

Exercice IV

1. On a la graphe suivant



2. Une suite déléments de E peut ne pas être convergente comme le montre le contre-exemple suivant :

$$u_n = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

qui est bien une suite d'éléments de E et qui n'a pas de limite.

3. Soit $x \in E$ alors x est isolé, en effet il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $]\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n-1)^2}[\cap E = \{x\}$. Ainsi $E^* = E$.

4. Soit $x \in E'$. Supposons $x > 0$ et posons $n = \mathrm{E}(\frac{1}{2\sqrt{x}})$. On a

$$\begin{array}{rcccl} n & \leq & \frac{1}{2\sqrt{x}} & < & n+1 \\ \frac{1}{4(n+1)^2} & \leq & x & < & \frac{1}{4n^2} \\ \frac{(-1)^{2n}}{(2(n+1))^2} & \leq & x & < & \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} \end{array}$$

Or $x \notin E^*$ donc il n'existe pas d'entier p tel que $x = \frac{(-1)^p}{p^2}$, ainsi

$$\frac{(-1)^{2n}}{(2(n+1))^2} < x < \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2}$$

soit alors

$$\varepsilon = \min\{x - \frac{(-1)^{2n}}{(2(n+1))^2}, \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} - x\}$$

on a $\varepsilon > 0$ et $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap E = \emptyset$ donc ce qui est en contradiction avec $x \in E'$. Ainsi $x \leq 0$.

De la même manière $x < 0$ entraine une contradiction ainsi $x \geq 0$, donc finalement $x = 0$. Ainsi : $E' \subset \{0\}$.

Reste à montrer que $\{0\} \subset E'$ c'est-à-dire que 0 est un point d'accumulation. Cela est immédiat car pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient $\frac{(-1)^n}{n^2} \in E$ avec $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

5. L'ensemble E n'est pas fermé puisque la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ est une suite d'éléments de E qui converger vers $0 \notin E$. En outre

$$\overline{E} = E^* \cup E' = E \cup \{0\}$$

6. Soit $I = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in I,\ \Omega_n = \left]\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n-1)^2}\right[\cup \left]-\frac{1}{(n-1)^2}, -\frac{1}{(n+1)^2}\right[\text{ si } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\Omega_1 = \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$$

Soit $y \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$y = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

or

$$\frac{(-1)^n}{n^2} \in \Omega_n$$

donc $y \in \cup_{n \in I} \Omega_n$. Ainsi

$$E \subset \cup_{n \in I} \Omega_n$$

Donc $(\Omega_n)_{n \in I}$ est un recouvrement de E par des ouverts. On ne peut pas en extraire de sous recouvrement fini, car

$$\frac{(-1)^n}{n^2} \notin \Omega_m$$

lorsque $n \neq m$.

7. L'ensemble E n'est pas compact car il n'est pas fermé. On pouvait aussi le déduire de la quesiton précédente car Borel-Lebesgue dit que de tout recouvrement d'un compact par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

8. L'ensemble E n'est pas ouvert car $E \notin \mathcal{V}(-1)$. On a $\mathring{E} = \emptyset$ puisque $E = E^*$.

9. La frontière de E est $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E} = E \cup \{0\}$.

Exercice VI

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}x$. Le réel a est un équilibre de la relation de recurrence si et seulement si $a = f(a)$ ce qui équivaut à $a^2 - \frac{3}{4}a = 0$ ce qui équivaut à $a(a - \frac{3}{4}) = 0$ ce qui équivaut à $a = 0$ ou $a = \frac{3}{4}$.

La fonction f est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = 2x + \frac{1}{4}$ ainsi $|f(0)| = |\frac{1}{4}| < 1$ donc 0 est un équilibre stable. Ainsi il existe un réel $r > 0$ tel que $u_0 \in]-r, r[$ entraine la convergence vers 0 de la suite issue de la condition initiale u_0.

2. Si $r \geq \frac{3}{4}$ alors la suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{3}{4}$ doit converger vers 0, or ce n'est pas le cas puisque $\frac{3}{4}$ est un équilibre (et donc $u_0 = \frac{3}{4}$ entraine $\lim u_n = \frac{3}{4}$).

3. Comme $]0, r[\subset]-r, r[$ on sait déjà que $\lim u_n = 0$. Montrons que $u_n > 0$ par récurrence. Soit P_n cette proposition.

- P_0 est vraie par hypothèse
- Supposons P_n vraie alors $u_n > 0$ donc $\frac{1}{4}u_n > 0$ donc $u_n^2 + \frac{1}{4}u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$ donc P_{n+1} est vérifiée.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, la question précédente donne $-u_n < 0 < u_n$ donc $\{0\} \subset A$.

Supposons qu'il existe $a \neq 0$ in A. Soit $\varepsilon = |a| > 0$, comme $\lim u_n = 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ entraine $|u_n| < \varepsilon$ ainsi $a \notin]-u_n, u_n[$ donc $a \notin A$. Contradiction.

Ainsi $A = \{0\}$.