

Correction des exercices de la feuille 7

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice I

1. L'ensemble K_i est la réunion de 2^i intervalles disjoints de longueur $\frac{1}{3^i}$. Notons $F_{i,0}, \dots, F_{i,2^i-1}$ ces intervalles. On a par exemple

$$\begin{aligned} F_{0,0} &= [0; 1] \\ F_{1,0} &= \left[0; \frac{1}{3}\right] & F_{1,1} &= \left[\frac{2}{3}; 1\right] \\ F_{2,0} &= \left[0; \frac{1}{9}\right] & F_{2,1} &= \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right] & F_{2,2} &= \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right] & F_{2,3} &= \left[\frac{8}{9}; 1\right] \end{aligned}$$

Supposons avoir fait la construction à l'étape i et notons

$$F_{i,j} = [a_{i,j}, b_{i,j}]$$

on a $b_{i,j} = a_{i,j} + \frac{1}{3}$. A l'étape $i + 1$ l'intervalle $F_{i,j}$ sera remplacé par les intervalles $F_{i+1,2j}$ et $F_{i+1,2j+1}$ avec

$$\begin{aligned} F_{i+1,2j} &= \left[a_{i,j}, a_{i,j} + \frac{1}{3^{i+1}}\right] \\ F_{i+1,2j+1} &= \left[a_{i,j} + \frac{2}{3^{i+1}}, a_{i,j} + \frac{1}{3^i}\right] \end{aligned}$$

ainsi définissons $(a_{i,j})_{i,j}$ par

$$\begin{cases} a_{0,j} &= 0 & \forall j \in \mathbb{N} \\ a_{i+1,2j} &= a_{i,j} & \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ a_{i+1,2j+1} &= a_{i,j} + \frac{1}{3^{i+1}} & \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

ceci définit des nombres $a_{i,j}$ pour tout entier i et pour tout entier $j < 2^i$. L'ensemble

$$K_i = \bigcup_{j=0}^{2^i-1} F_{i,j}$$

est bien défini. De plus $K_i \subset K_{i-1}$ pour tout entier i non nul. On obtient l'ensemble triadique de Cantor avec

$$K = \bigcap_{i=0}^{+\infty} K_i$$

2. L'ensemble K est fermé puisqu'il est une intersection de fermés. Il n'est pas ouvert puisque K est fermé et que ce n'est ni \emptyset ni \mathbb{R} .

3. Les éléments de K_1 sont ceux qui s'écrivent

$$\overline{0,0\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,1\dots}^3$$

ceux de K_2 sont ceux qui s'écrivent

$$\overline{0,00\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,01\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,10\dots}^3 \text{ ou } \overline{0,11\dots}^3$$

pour montrer que les réels de K_i sont ceux dont un développement ternaire ne contient que des 0 et des 2 jusqu'à la i -ième position incluse on procède par récurrence. Soit P_i cette proposition. Alors

- P_1 est vrai
- supposons P_i vrai. Soit $x \in K_{i+1}$ alors

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3$$

donc

$$3x = \overline{a_1, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3 = a_1 + \overline{0, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3$$

par construction de K on a $\overline{0, a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots}^3 \in K_i$ donc pour tout entier p compris entre 2 et $i + 1$ on a $a_p \in \{0; 1\}$. On a aussi $a_1 = 0$ donc P_{i+1} est vrai.

En conséquence les éléments de K sont ceux dont un développement ternaire ne contient que des 0 et des 2.

4. Soit ψ l'application suivante

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow [0; 1] \\ x = \overline{0, a_1 a_2 \dots}^3 &\longmapsto \sum_{p \geq 1} \frac{a_p/2}{2^p} \end{aligned}$$

$a_p/2 \in \{0; 1\}$ puisque $a_p \in \{0; 2\}$, l'image de x est un réel donné par son développement binaire. Cette application est bien surjective car tout nombre de $[0; 1]$ admet un développement binaire.

On a vu dans la feuille d'exercices 4 que l'intervalle $[0; 1]$ n'est pas dénombrable donc K ne l'est pas non plus. En effet si K l'était on pourrait numéroter ses éléments et par la même les éléments de $[0; 1]$ en choisissant comme numéro l'un des numéros de l'image réciproque par ψ .

5. L'ensemble K n'est pas dénombrable donc $\forall x \in K$, il n'existe pas $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset K$, ainsi $x \notin \overset{\circ}{K}$. Par suite $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.