

## Correction des exercices de la feuille 5

*Exercice non corrigé en travaux dirigés*

### Exercice VI

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x - x^2$ .

1. Le réel  $e$  est un équilibre de la relation de récurrence si et seulement si  $f(e) = e$  si et seulement si

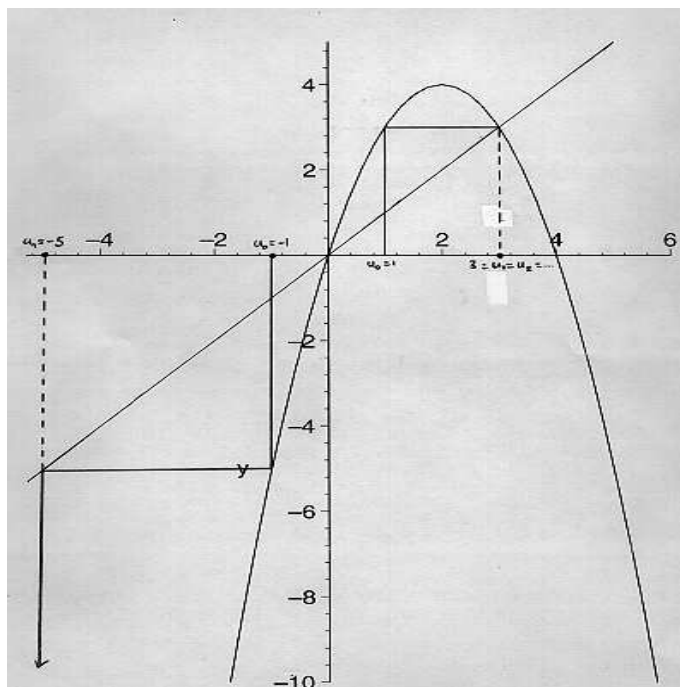
$$e^2 - 3e = 0$$

si et seulement si  $e = 0$  ou  $e = 3$ .

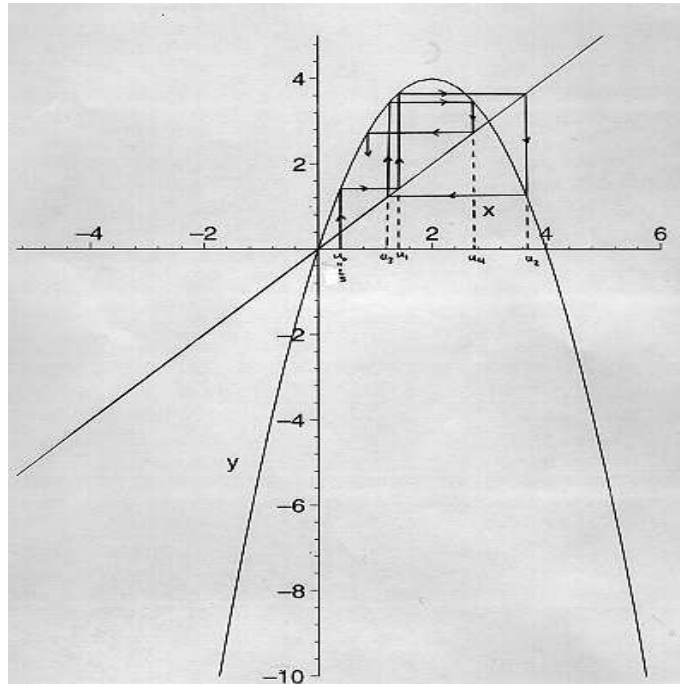
2. La fonction  $f$  est dérivable et  $f'(x) = 4 - 2x$ .

- $|f'(0)| = 4 > 1$  donc 0 est un équilibre instable
- $|f'(3)| = |-2| > 1$  donc 3 est un équilibre instable

3. Les suites issues des conditions initiales  $u_0 = -1$  et  $u_0 = 1$  sont présentées ci-dessous. Remarquons que la suite est constante à partir du second terme dans ce dernier cas.



La suite issue de la condition initiale  $u_0 = \frac{1}{5}$  est présentée ci-dessous.



4.

a. Soit  $P_n$  la proposition  $u_n = 4 \sin^2(2^n \alpha)$ .

•  $P_0$  est vraie puisque  $u_0 = 4 \sin^2 \alpha$ .

• Supposons  $P_n$  vrai alors  $u_n = 4 \sin^2(2^n \alpha)$  ce qui implique les 4 lignes suivantes

$$u_{n+1} = 16 \sin^2(2^n \alpha) - 16 \sin^4(2^n \alpha)$$

$$u_{n+1} = 4^2 \sin^2(2^n \alpha)(1 - \sin^2(2^n \alpha))$$

$$u_{n+1} = 4^2 \sin^2(2^n \alpha) \cos^2(2^n \alpha)$$

$$u_{n+1} = 4 \sin^2(2^{n+1} \alpha)$$

en utilisant que  $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ . Par suite  $P_{n+1}$  est vérifiée.

b. Comme 0 est un équilibre instable,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $u_N = 0$ , ce qui équivaut à  $4 \sin^2(2^N \alpha) = 0$ , ce qui équivaut à  $\sin(2^N \alpha) = 0$ , ce qui équivaut à  $\exists k \in \mathbb{Z}, 2^N \alpha = k\pi$ , ce qui équivaut à  $\alpha = \frac{k\pi}{2^N}$ .

c. Comme 3 est un équilibre instable,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $u_N = 3$ , ce qui équivaut à  $4 \sin^2(2^N \alpha) = 3$ , ce qui équivaut à  $\sin(2^N \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $\sin(2^N \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , ce qui équivaut à  $\exists \kappa \in \mathbb{Z}, 2^N \alpha = \frac{\pi}{3} + \kappa\pi$  ou  $2^N \alpha = \frac{2\pi}{3} + \kappa\pi$  ce qui équivaut à  $2^N \alpha = \frac{k}{3}\pi$  avec  $k$  non divisible par 3 puisque  $\kappa = \frac{k}{3}$  ou  $\kappa = \frac{2k}{3}$ . Cela équivaut à  $\alpha = \frac{k\pi}{3 \times 2^N}$  avec  $k$  entier et non divisible par 3.

5. Soit  $P_n$  l'hypothèse de récurrence  $u_n \leq 4^n u_0$ .

•  $P_0$  est vraie puisque  $u_0 \leq u_0$ .

• Supposons  $P_n$  vraie alors  $u_n \leq 4^n u_0$  donc  $4u_n \leq 4^{n+1} u_0$ . Comme  $-u_n^2 \leq 0$  on obtient  $4u_n - u_n^2 \leq 4^{n+1} u_0$  par suite  $u_{n+1} \leq 4^{n+1} u_0$  donc  $P_{n+1}$  est vérifiée.

On a  $\lim 4^n = +\infty$ . Si  $u_0 < 0$  alors  $\lim 4^n u_0 = -\infty$  par suite  $\lim u_n = -\infty$ . De plus les racines de  $4x - x^2$  sont 0 et 4, donc si  $u_0 > 4$  alors  $u_1 < 0$ . De manière analogue à la question précédente on montre alors que  $u_n \leq 4^{n-1} u_1$  et on conclut que  $\lim u_n = -\infty$ .