

## Correction des exercices de la Feuille 3

*Exercice non corrigé en travaux dirigés*

### Exercice VIII

Notons

$$u_n = \frac{an^2 + bn + 1}{n^3}$$

- Si  $a \neq 0$  alors  $\lim \frac{u_n}{\frac{a}{n}} = 1$  donc

$$(u_n) \sim \frac{a}{n}$$

Si  $a > 0$  alors ces suites sont positives à partir d'un certain rang, elles sont équivalentes et  $a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge (série de Riemann avec  $s = 1 \leq 1$ ) donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  diverge. Si  $a < 0$  le raisonnement est analogue pour montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} -u_n$  diverge, donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  diverge.

- Si  $a = 0$  alors

- Si  $b \neq 0$  alors  $\lim \frac{u_n}{\frac{b}{n^2}} = 1$  donc

$$(u_n) \sim \frac{b}{n^2}$$

Si  $b > 0$  alors ces suites sont positives à partir d'un certain rang, elles sont équivalentes et  $b \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  converge (série de Riemann avec  $s = 2 > 1$ ) donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge. Si  $b < 0$  le raisonnement est analogue pour montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} -u_n$  converge, donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge.

- Si  $b = 0$  alors  $u_n = \frac{1}{n^3}$ , la série associée est de Riemann avec  $s = 3 > 1$  donc convergente.

Conclusion :  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge si et seulement si  $a = 0$ .