Interrogation du 3/10/2005

Corrigé du sujet C

Exercice I

1. Le gradient de f au point (x, y) est

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y - 2 \\ 3y^2 + x - 1 \end{pmatrix}$$

si bien que (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 3y^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -6y^2 + y = 0 \\ x = 1 - 3y^2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{6} \\ x = 1 - 3y^2 \end{cases}$$

c'est-à-dire $(x, y) \in \{(1; 0), (\frac{11}{12}, \frac{1}{6})\}$.

2. La matrice hessienne de f en (x, y) est

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\mathrm{H}\, f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}\, f\left(\frac{11}{12}, \frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice $\mathrm{H}\, f(1,0)$ a un determinant égal à $-1 < 0$ donc $(1; 0)$ est un point-selle de f. La matrice $\mathrm{H}\, f(\frac{11}{12}, \frac{1}{6})$ a un determinant égal à $1 > 0$ et une trace égale à $3 > 0$ donc $(\frac{11}{12}, \frac{1}{6})$ est un minimum de f.

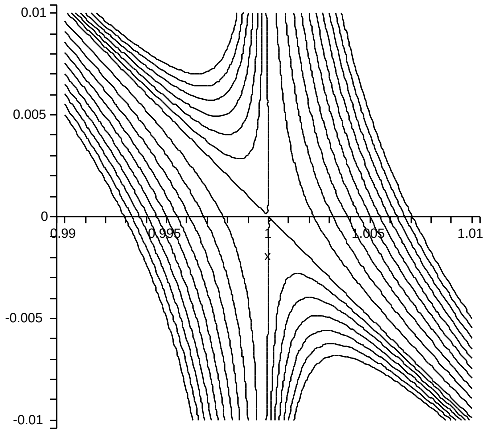
4. Soit $a = x - 1$ et $b = y$, on a

$$^t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

ce qui équivaut à

$$2a^2 + 2ab = 0$$

ce qui équivaut à $a(a + b) = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = -a$. Cella correspond à $x = 1$ ou $y = 1 - x$, ces deux équations sont les celles des lignes séparatrices de col en $(1; 0)$ ce qui nous permet d'esquisser les courbes de niveau au voisinage de ce point.



5. La fonction f n'admet pas de minimum global, en effet $f(0,y) = y^3 - y + 1$ et $\lim_{y\to+\infty}(y^3 - y + 1) = -\infty$. De manière analogue elle n'admet pas de maximum global puisque $\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = +\infty$.

Exercice II

Première Méthode : Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(X,Y) = -X^3 + 3X + Y^2$ (cette fonction apparaît dans le devoir 1). Elle admet deux points critiques seulement : un point selle en $(1,0)$ et un minimum en $(-1,0)$. En effet :

$$\nabla g(X,Y) = \begin{pmatrix} -3X^2 + 3 \\ 2Y \end{pmatrix}$$

si bien que (X,Y) est un point critique de g si et seulement si

$$\begin{cases} X^2 - 1 = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si $(X,Y) \in \{(1;0),(-1;0)\}$. En outre

$$\mathrm{H}\, g(X,Y) = \begin{pmatrix} -6X & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

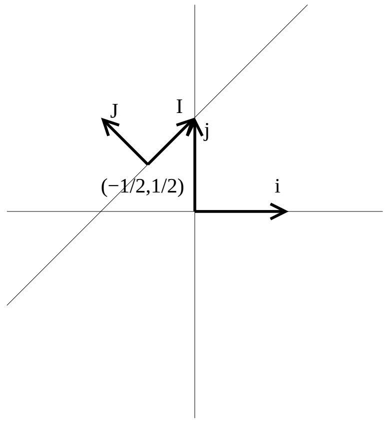
ainsi

$$\mathrm{H}\, g(-1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}\, g(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres d'une matrice diagonale se lisent sur la diagonale, on en déduit que g admet un point selle en $(1,0)$ et un minimum en $(-1,0)$. Ces deux points sont bien les deux seuls points critiques de g.

Effectuons un changement de repère, placant l'ancien axe des abcissses sur la droite $(-1,0)$, $(0,1)$. Considérons à présent le point $\Omega = (-1/2, 1/2)$, et les vecteurs

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \\ \overrightarrow{J} &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \end{aligned}$$



Soit M le point de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$ et de coordonées (X, Y) dans $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ ce qui donne

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(X - Y) \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(X + Y) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} X = x + y \\ Y = y - x - 1 \end{cases}$$

Considérons donc la fonction f définie par

$$f(x, y) = g(x + y, y - x - 1) = -(x + y)^3 + 3(x + y) + (y - x - 1)^2$$

La fonction f admet un minimum en $(-1, 0)$ et un point-selle en $(0, 1)$. En outre ces deux points sont bien les deux seuls points critiques de f.

Deuxième Méthode : On considère une fonction polynomiale et on adapte les coefficients pour obtenir lees propriétés demandées.

Troisème Méthode : On peut faire “glisser” une parabole $y \mapsto y^2$ sur la cubique $t \mapsto -t^3 + 3t$ orientée dans la direction de la droite $y = x + 1$.

Remarque : Il n'y a pas unicité de la fonction f satisfaisant (i), (ii) et (iii). Il est donc possible que vous donniez une autre fonction qui convienne.

Exercice III

1. Nous considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2 - x^2y + 2y + xy + y^2$. On a

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2xy + y \\ -x^2 + 2 + x + 2y \end{pmatrix}$$

si bien que (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} y(-2x + 1) = 0 \\ -x^2 + 2 + x + 2y = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \\ -x^2 + 2 + x + 2y = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x^2 + x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

Le discriminant du polynone $-x^2+x+2$ est $\Delta = 9$, ses racines sont -1 et 2. Les points critiques sont donc

$$(-1,0),\ (2,0)\ \left(\frac{1}{2},-\frac{9}{8}\right)$$

Le dernier point critique permet d'exclure les deux graphes du haut, et les deux premiers points critiques permettent d'exclure le graphe de droite, si bien que les courbes de niveau sont représentées par le graphe en bas à gauche.

2. On a

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x+1 \\ -2x+1 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\mathrm{H}\, f\left(\frac{1}{2},-\frac{9}{8}\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive, ainsi f admet un minimum en $(\frac{1}{2},-\frac{9}{8})$. Comme le gradient pointe dans le sens des courbes de niveaux dont l'altitude est croissante, on obtient que le vecteur représenté ci-dessous à la même direction et le même sens que le gradient en ce point.