Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2008

Examen du xx/xx/2005

Corrigé

Exercice I

1. Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \exp t + \ln(t+1) + t^4 + t$$

cette application est une somme d'applications strictement croissantes, de ce fait elle est strictement croissante.

Soit g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2$$

on a $f = \varphi \circ g$. Comme φ est strictement croissante, f et g admettent des extrema aux mêmes points. Cherchons les extrema de g.

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix}$$

ainsi $\nabla g(x, y, z) = 0$ si et seulement si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Ce point est le seul point critique et donc le seul point condidat à être un extremum de g. En outre

$$\mathrm{H}\, g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice définie positive. Ainsi g, et donc f, a un seul extremum (qui est un minimum) en $(0, 0, 0)$.

2. Le point $(0, 0, 0)$ est un minimum global de g puisque

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) \geq 0 = g(0, 0, 0)$$

Par suite f admet également un minim global en $(0, 0, 0)$.

En revanche g, et donc f n'admet par de minimum global puisque $g(x, 0, 0) = x^2$ n'est pas borné.

Exercice II

1. Considérons la fonction L définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$L(x, y, \lambda) = (1+x)(1+y) + \lambda(xy - 4)$$

On a

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + x + \lambda x \\ 1 + y + \lambda y \\ xy - 4 \end{pmatrix}$$

Le point (x, y, λ) est un point critique de L si et seulement si

$$\begin{cases} 1 + (1+\lambda)s = 0 \\ (x-y)(1+\lambda) = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$(x, y, \lambda) \in \left\{ \left(2, 2, -\frac{3}{2}\right) \right\}$$

Si f admet un minimum en (x, y) sous la contrainte $xy = 4$ alors alors (x, y, λ) est un point critique de L, ainsi le seul point possible est $(2, 2)$.

2. Considérons la fonction L définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \Pi_{i=1}^n (1 + x_i) + \lambda(\Pi_{i=1}^n x_i - 2^n)$$

Le point (x, y, λ) est un point critique de L si et seulement si $\nabla L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1, n]\!],\ \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{i=1}^n (1 + x_i) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{i=1}^n x_i \\ \Pi_{i=1}^n x_i = 2^n \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1, n]\!],\ \Pi_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} (1 + x_i) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} x_i = 0 \\ \Pi_{i=1}^n x_i = 2^n \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1, n]\!],\ \Pi_{i \in [\![1,n]\!]} (1 + x_i) + (1 + x_j) \lambda \Pi_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} x_i = 0 \\ \Pi_{i=1}^n x_i = 2^n \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1, n]\!],\ \Pi_{i=1}^n (1 + x_i) + \lambda \Pi_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} x_i + 2^n \lambda = 0 \\ \Pi_{i=1}^n x_i = 2^n \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \Pi_{i=1}^n (1 + x_i) + \lambda \Pi_{i=2}^n x_i + 2^n \lambda = 0 \\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ \lambda \Pi_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} x_i - \lambda \Pi_{i=1}^n x_i = 0 \\ \Pi_{i=1}^n x_i = 2^n \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \Pi_{i=1}^n (1 + x_i) + \lambda \Pi_{i=2}^n x_i + 2^n \lambda = 0 \\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ \lambda (x_j - x_1) \Pi_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,j\}} x_i = 0 \\ \Pi_{i=1}^n x_i = 2^n \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \Pi_{i=1}^n (1 + x_i) + \lambda \Pi_{i=2}^n x_i + 2^n \lambda = 0 \\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ x_j = x_1 \\ \Pi_{i=1}^n x_i = 2^n \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} (1 + x_1)^n + x_1^{n-1} + 2^n \lambda = 0 \\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ x_j = x_1 \\ x_1^n = 2^n \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x_1 > 0)$

$$\begin{cases} (1 + x_1)^n + x_1^{n-1} + 2^n \lambda = 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 2 \end{cases}$$

Ainsi le seul extremum possible de f sous la contrainte indiquée est $(2, \dots, 2)$.

Exercice III

Notons $x = AB$ et $y = BC$. Le fait que $(ABCD)$ est un rectangle entraine $CD = AB = x$ et $AD = BC = y$.

Notons H la projection orthogonale de E sur (AD). Le caractère isocèle rectangle de (ADE) entraine $AH = EH = DH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}y$ et $DE = EA = \frac{\sqrt{2}}{2}y$.

L'aire de $(ABCDE)$ est la somme de xy qui est l'aire du rectange $(ABCD)$ et de $\frac{1}{4}y^2$. Notons

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{4}y^2$$

la fonction objectif.

Le périmètre de $(ABCDE)$ est $x + y + x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 2x + (1+\sqrt{2})y$ ce qui donne la contrainte

$$2x + (1+\sqrt{2})y = 2 + 4\sqrt{2}$$

Notons L la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} L\ :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,\lambda,\alpha) & \mapsto & f(x,y) + \lambda(2x + (1+\sqrt{2})y - (2+4\sqrt{2}) + \alpha^2) \end{array}$$

Les points cadidats à maximiser f sous la contrainte indiquée sont des points critiques de L, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} y + 2\lambda = 0 \\ x + \frac{1}{2}y + (1+\sqrt{2})\lambda = 0 \\ 2x + (1+\sqrt{2})y - (2+4\sqrt{2}) + \alpha^2 = 0 \\ \alpha\lambda = 0 \end{array}\right.$$

L'hypothèse $\lambda = 0$ conduit à une impossibilité, ainsi $\alpha = 0$:la contrainte est saturée. Le système précédent est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} y = -2\lambda \\ x = -\sqrt{2}\lambda \\ -2\lambda(1+2\sqrt{2}) = (2+4\sqrt{2}) \\ \alpha = 0 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = \sqrt{2} \\ \lambda = -1 \\ \alpha = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $AB = \sqrt{2}$cm, $BC = 2$cm, $CD = \sqrt{2}$cm, $DE = \sqrt{2}$cm et $EA = \sqrt{2}cm$.