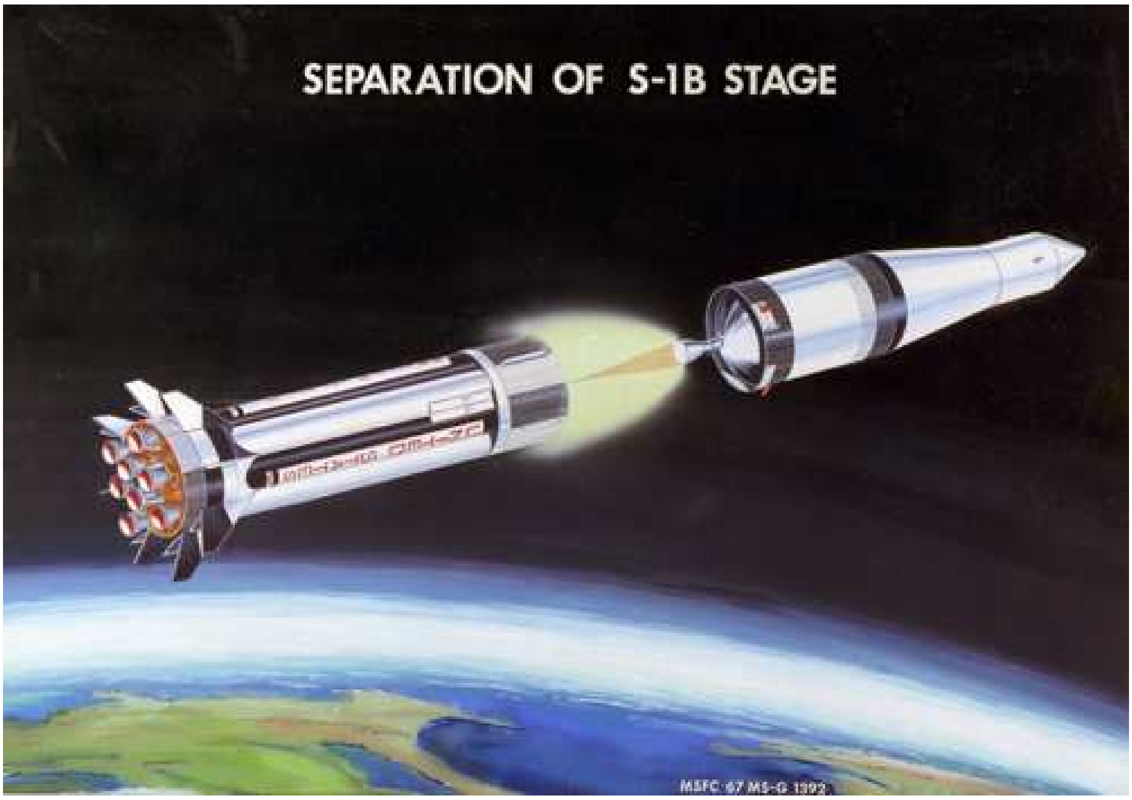
Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2008

Devoir 2

A rendre le 3/11/2005

La fusée Saturn V, qui fut utilisée dans la mission Apollo pour mettre un homme sur la Lune, est constituée de trois étages. Le premier étage, qui est le plus gros permet à la fusée de décoller. Lorsque tout le carburant du premier étage est consommé, cet étage est éjecté. Le deuxième étage est plus petit mais fonctionne de manière analogue : lorsque le carburant qu'il contient est épuisé, l'étage est éjecté.



Le but de ce devoir est de déterminer les masses optimales de chacun des étages afin de minimiser la masse totale de la fusée tout en l'amenant à une vitesse donnée V_d lui permettra de s'extraire de l'attraction terrestre.

Exercice I

Soit $M \in]0, +\infty[$ la masse d'une fusée à un étage comprenant en particulier le carburant, le moteur, la carrosserie et l'électronique embarquée. Notons $P \in]0, +\infty[$ la masse du chargement (le *payload*) c'est-à-dire la masse de ce qui est envoyé par la fusée, $c \in]0, +\infty[$ la vitesse des gaz d'échappement par rapport à la fusée et $S \in]0, 1[$ un coefficient appelé *facteur structurel* qui est constant et determiné par les paramètres de conception de la fusée. En outre, on suppose que $V_d \neq -3c \ln S$. La différence de vitesse $\triangle V$ résultant de l'accélération de la fusée, dont la consommation de carburant est constante, peut être modélisée par

$$\triangle V = -c \ln \left(1 - \frac{(1-S)M}{M+P} \right) \tag{1}$$

1. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, notons M_i la masse de l'étage i comprenant en particulier le carburant, le moteur, la carrosserie et l'électronique embarquée de cet étage. On supposera que S et c sont indépendants de l'étage considéré. Montrer que dans le cas de Saturn V on a

$$V_d = c \left[\ln \left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + P}{SM_1 + M_2 + M_3 + P} \right) + \ln \left(\frac{M_2 + M_3 + P}{SM_2 + M_3 + P} \right) + \ln \left(\frac{M_3 + P}{SM_3 + P} \right) \right]$$

2. Notons

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{M_1 + M_2 + M_3 + P}{SM_1 + M_2 + M_3 + P} \\ N_2 &= \frac{M_2 + M_3 + P}{SM_2 + M_3 + P} \\ N_3 &= \frac{M_3 + P}{SM_3 + P} \end{aligned}$$

Montrer que

$$\frac{(M_1 + M_2 + M_3) + P}{P} = \frac{(1-S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1 - SN_1)(1 - SN_2)(1 - SN_3)} \tag{2}$$

Exercice II

Pour $S \in]0, 1[$, considérons l'application f_S définie par

$$f_S(x, y, z) = (1-S)^3 \frac{xyz}{(1 - Sx)(1 - Sy)(1 - Sz)}$$

déterminer le minimum de f_S sous la contrainte

$$\ln x + \ln y + \ln z = \lambda$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre donné. On pourra supposer que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $1 - Sx > 0$, $1 - Sy > 0$ et $1 - Sz > 0$.

Exercice III

1. Soit P fixé. Déterminer M_1, M_2, M_3 afin que la fusée atteigne la vitesse V_d et tels que la masse totale de la fusée $M_1 + M_2 + M_3 + P$ soit minimale. On pourra considérer que M_1, M_2 et M_3 sont déterminés, lorsqu'on a donné un système linéaire triangulaire dont ils sont solutions.

2. La vitesse nécessaire pour s'extraire de l'attraction terrestre est $V_d = 11000\ m/s$, le facteur structurel est $S = 0.2$ et la vitesse des gaz d'échappement est $c = 2600\ m/s$. Déterminer une valeur approchée de la masse optimale de chaque étage pour envoyer un chargement de 250 kg.