Devoir 1

A rendre le 26/09/2005

Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = -x^3 + 3x + y^2$$

Pour tout réel k notons $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = k\}$ et $A = (1; 0)$.

Exercice I

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}_2$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ puis dans $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2. Montrer qu'il existe une fonction g définie de $[-2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

i) $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_2^-$

ii) $\mathcal{C}_2^+$ est la courbe représentative de g

iii) $\mathcal{C}_2^-$ est la courbe représentative de $-g$

3. Etudier la fonction g, en déduire $\mathcal{C}_2$ et représenter cette courbe sur un graphe.

4. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}_2$. En déduire la représentation graphique de $\mathcal{C}_2 \cap B_\infty(A, 0.05)$ où $B_\infty(A, 0.05) =]0.95, 1.05[\times] - 0.05, 0.05[$.

Exercice II

1. Montrer que si $|k| > 2$ alors l'équation $x^3 - 3x + k = 0$ a une seule solution qu'on pourra noter α_k. Montrer que si $|k| < 2$ alors $x^3 - 3x + k = 0$ a trois solutions, une dans $] - 2, -1[$ que l'on pourra noter $\alpha^{k,1}$, une dans $] - 1, 1[$ que l'on pourra noter $\alpha_{k,2}$ et une dans $]1, 2[$ que l'on pourra noter $\alpha_{k,3}$.

2. Discuter le signe de $x^3 - 3x + k$ en fonction du paramètre réel k.

3. Soit $k > 2$, montrer que $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_k^+ \cup \mathcal{C}_k^-$ où $\mathcal{C}_k^+$ et $\mathcal{C}_k^-$ sont les courbes représentatives de deux fonctions, respectivement à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$. Représenter $\mathcal{C}_k$ pour quelques valeurs *ad hoc* de k.

4. Refaire la question 3, en substituant $k < 2$ à $k > 2$.

5. Représenter $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs *ad hoc* de k.

6. Représenter $\mathcal{C}_k \cap B_\infty(A, 0.05)$ pour quelques valeurs *ad hoc* de k. Indiquez dans quelles régions $k > 2$ et dans quelles régions $k < 2$.

7. En déduire que f n'admet pas d'extremum en A.