Corrigé de la feuille d'exercices 3

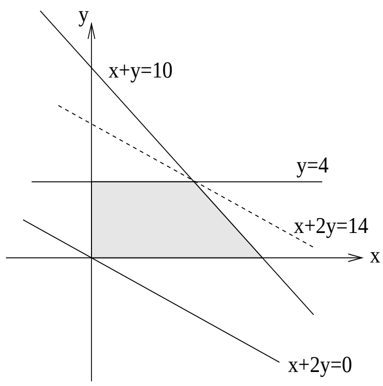
Exercices non corrigés en TD

Exercice III

Le domaine D est représenté par la figure ci-dessous. Puisque $Z(x, y) = x + 2y$ est linéaire par rapport à x et y, ses courbes de niveau sont $x + 2y = Const$, qui est paralléle à la ligne droite $x + 2y = 0$. On a :

- pour le point $(0, 0) \in D$, $x + 2y = 0$;
- pour le point $(6, 4) \in D$, $x + 2y = 14$;
- pour les autres points dans D, $x + 2y = C$ avec $0 < C < 14$.

On en déduit qu'il y a un minimum $(0, 0)$ et un maximum $(6, 4)$.



Exercice IV

Il y a deux minima $(1/\sqrt{2}, 1/2)$ et $(-1/\sqrt{2}, 1/2)$.

La contrainte est $g(x, y) = 1 - x^2 - y \leq 0$. Pour trouver les extrema, on calcule $\nabla f(x, y) + \mu \nabla g(x, y) = (0, 0)$, ce qui conduit à

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2x \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut discuter les différentes situations :

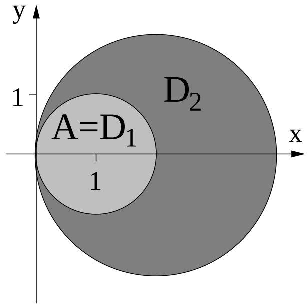
- Soit $g < 0$. Alors $\mu = 0$. De l'équation ci-dessus, on déduit que $(x, y) = (0, 0)$. Ce point ne satisfait pas la contrainte.
- Soit $g = 0$. Alors

$$\begin{cases} x = \mu x \\ \mu = 2y \\ x^2 + y = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \mu = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1/\sqrt{2} \\ y = 1/2 \\ \mu = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1/\sqrt{2} \\ y = 1/2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Le point $(0, 1)$ n'est ni minimum ni maximum, car $f(0, 1) = 1 < f(0, 1 + \varepsilon)$ et $f(0, 1) > f(\varepsilon, 1 - \varepsilon^2)$ pour un ε suffisament petit. Pour les points $(1/\sqrt{2}, 1/2)$ et $(-1/\sqrt{2}, 1/2)$ on peut montrer que ces points sont des minima.

Exercice VI

1. Soit A l'ensemble admissible, D_1 le disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1, D_2 le disque de centre $(2,0)$ et de rayon 2. On a $A = D_1 \cap D_2$, or $D_1 \subset D_2$ donc $A = D_1$.



2. On a $h_1(x,y) \leq 0 \Rightarrow h_2(x,y) \leq 0$ donc la contrainte $h_2 \leq 0$ est inactive.

3. Puisque la contrainte $h_2 \leq 0$ est inactive, considérons $L(x,y,\lambda,\alpha) = f(x,y) + \lambda(h_1(x,y) + \alpha^2)$. On a

$$\nabla L(x,y,\lambda,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda(x-1) \\ 1 + 2\lambda y \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 + \alpha^2 \\ 2\alpha\lambda \end{pmatrix}$$

ainsi (x,y,λ,α) est un point critique de L si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 1 + 2\lambda(x-1) = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 + \alpha^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ 1 = 0 \text{ (impossible)} \\ 1 = 0 \text{ (impossible)} \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

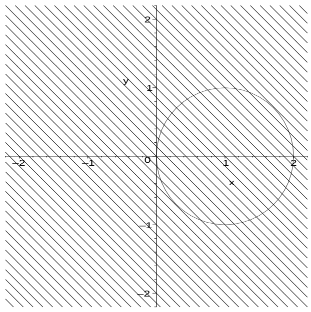
ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

La condition nécessaire pour être la solution du problème de minimisation est d'appartenir à

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

4. Les courbes de niveau de f sont des droites.



Le gradient est orienté vers le haut et la gauche. Le minimum se trouve au point du disque D_1 qui se trouve sur la courbe de niveau d'altitude la plus faible : $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$