Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2008

Feuille d'exercices 3

Optimisation sous contraintes d'inégalité

Exercice I

En utilisant la méthode du lagrangien[1] et les variables d'écart, déterminer le (ou les) points (x, y) qui maximise la fonction objectif f sous la contrainte donnée.

1. $f(x, y) = 2y - x^2$. Contraintes : $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$ et $x \geq 0$, $y \geq 0$.

2. $f(x, y) = xy$. Contrainte : $h(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$.

Exercice II

Refaire l'exercice I en utilisant le théorème de Karush-Kuhn-Tucker.

Exercice III

On considère la fonction $Z(x, y) = x + 2y$ et les contraintes

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Au moyen d'un graphe trouver les extrema de Z.

Exercice IV

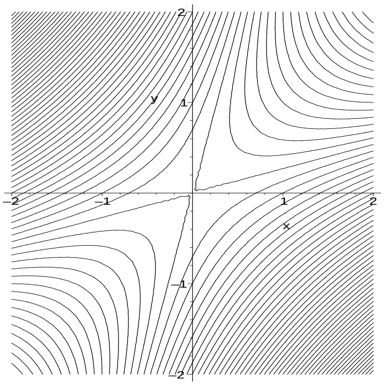
Minimiser $x^2 + y^2$ sous la contrainte $x^2 + y \geq 1$.

[1] Joseph-Louis Lagrange, mathématicien italien puis français, du XVIIIe et XIXe siècle. Il travailla dans les années 1790 au système métrique et enseigna à l'Ecole Polytechnique dont il participa à la fondation. Il excella dans toutes les disciplines d'analyse, de théorie des nombres et de mécanique celeste. En 1788 il publia *Mécanique analytique* qui est célébre pour l'utilisation des équations différentielles. La mécanique devient alors une branche des mathématiques. En 1797 il publia la première théorie des fonctions d'une variable réelle.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Exercice V

On considère la fonction f dont les courbes de niveau sont données ci-après. Le gradient en $(1;1)$ est orienté vers le haut et vers la droite.



1. Trouver graphiquement le ou les maximum(s) de f sous la contrainte $x+y \leq 1$.

2. Trouver graphiquement le ou les maximum(s) de f sous la contrainte $x^2+y^2 \leq 1$.

Exercice VI

Soit f, h_1 et h_2 les fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x+y \\ h_1(x,y) &= (x-1)^2+y^2-1 \\ h_2(x,y) &= (x-2)^2+y^2-4 \end{aligned}$$

Considérons le problème de minimisation de f sous les contraintes $h_1 \leq 0$ et $h_2 \leq 0$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble admissible

2. Montrer que l'une des contraintes est inactive

3. Donner une condition nécéssaire pour que (x,y) soit solution du problème de minimisation.

4. Au moyen des courbes de niveau de f, indiquez quelle est la solution du problème de minimisation.

Exercice VII

Utiliser un graphe pour maximiser la fonction

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x-y \leq 0 \\ 3x+2y \geq 6 \\ 3x+2y \leq 12 \\ y \leq 4 \end{cases}$$