

## Feuille d'exercices 1

### *Equations des plaques*

#### Exercice I

On considère une plaque translatée par un vecteur  $v = (a, b, c)$ .

1. Ecrire la déformation  $U$  correspondante.
2. Calculer le tenseur des déplacements  $\epsilon$  associé.
3. En déduire l'énergie élastique de la plaque après translation.

#### Exercice II

Soit  $w$  et  $\hat{w}$  deux fonctions de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer  $\operatorname{div}((D\nabla w)\nabla\hat{w} - \Delta w\nabla\hat{w})$ .
2. Montrer que si

$$w = \hat{w} = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega$$

alors

$$\int_{\Omega} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x_1^2} \right) d\Omega = 0$$

#### Exercice III

On considère une plaque d'épaisseur  $h > 0$  dont la surface moyenne est  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . On considère le modèle de Kirchhoff<sup>1</sup>.

1. La déflexion verticale  $w$  peut-elle être  $tx^2y^2$  en présence d'un champ de forces dont la composante verticale est  $tx^2 + ty^2$  ?
2. La déflexion verticale  $w$  peut-elle être  $\sin t \cos(x) \cos(y)$  en présence d'un champ de forces dont la composante verticale est  $tx^2 + ty^2$  ?

---

<sup>1</sup>Gustav Kirchhoff, physicien allemand du XIXe siècle, contribua à de nombreux domaines dont les circuits électriques et la spectroscopie. Il résolu également un certain nombre de problèmes concernant la déformation des plaques élastiques.



Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887)