Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — Semestre 2

Interrogation du 7/03/2003

corrigé

Exercice I

1. Le réel $e \in I$ est un équilibre de la relation de récurrence si et seulement si

$$e = e - \frac{g(e)}{g'(e)} \text{ et } e \in I$$

Comme g' ne s'annule pas sur I, cette équation équivaut à $g(e) = 0$ avec $e \in I$. Cette dernière équation a une solution unique α, en conséquence la relation de récurrence a un unique équilibre α sur I.

2. Soit $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Une condition suffisant de stabilité locale est $|f'(x)| < 1$. Or

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)g'(x) - g(x)g''(x)}{g'(x)^2} = \frac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2}$$

on obtient donc la condition suffisante suivante :

$$\left| \frac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2} \right| < 1 \tag{1}$$

Cette condition est toujours satisfaire en α puisque $g(\alpha) = 0$.

3. Considérons (par exemple)

$$\begin{cases} u_0 = \frac{a+b}{2} \\ u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \end{cases}$$

La question précédente permet d'affirmer que $\lim u_n = \alpha$.

4. Proposons l'algorithme suivant

- $x \leftarrow \frac{a+b}{2}$
- Tant que $g(x - \varepsilon)g(x + \varepsilon) > 0$ faire $x \leftarrow x - \frac{g(x)}{g'(x)}$
- Rendre le résulat : x

Le test $g(x - \varepsilon)g(x + \varepsilon) > 0$ a pour but de poursuivre la recherche de racine jusqu'à ce que g change de signe dans un invervalle centré en x de rayon ε. Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que g admet une racine α telle que $|x - \alpha| \leq \varepsilon$.

Exercice II

Considérons l'équation caractéristique

$$X^2 - X - 2 = 0$$

Son discriminant est $\Delta = 9$ et ses deux racines sont -1 et 2 ainsi il existe deux réels A et B tels que

$$u_n = (-1)^n A + 2^n B$$

Or $u_0 = 0$ et $u_1 = -1$ est équivalent à $A = -B$ et $-A + 2B = -1$ ce qui est équivalent à $A = \frac{1}{3}$ et $B = -\frac{1}{3}$. Par suite

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3} - \frac{2^n}{3}$$

Exercice III

1. L'ensemble E n'est pas un voisinage de 1 puisque $\forall \varepsilon > 0,\ ]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\not\subset E$.

2. L'ensemble E n'est pas un voisinage de 4 puisque $4 \notin E$

3. L'ensemble E n'est pas un ouvert puisque E n'est pas voisinage de 1 qui est l'un de ses éléments.

4. On a $E \setminus \{1\} =]1,2[\cup]3,4[\cup]4,5[$ qui est la réunion de 3 intervalles ouverts qui sont des ouverts. Ainsi $E \setminus \{1\}$ est un ouvert.

Exercice IV

1. Considérons f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$. Le réel α est un équilibre si et seulement si $\alpha = f(\alpha)$ ce qui est logiquement équivalent aux lignes suivantes

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) &= 6\alpha \\
\alpha((\alpha+1)(\alpha+2)-6) &= 0 \\
\alpha(\alpha^2+3\alpha-4) &= 0 \\
\alpha(\alpha^2+3\alpha-4) &= 0 \\
\alpha(\alpha+4)(\alpha-1) &= 0
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\alpha \in \{-4; 0; 1\}$.

2. La fonction f est polynomiale et donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivé est $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}$. Par suite

- $f'(-4) = \frac{13}{3} > 1$ donc -4 est un équilibre instable
- $f'(0) = \frac{1}{3}$ donc $|f'(0)| < 1$ donc 0 est un équilibre stable
- $f'(1) = \frac{11}{6} > 1$ donc 1 est un équilibre instable

3. Soit P_n la proposition $u_n > 1$

- P_1 est vraie par hypothèses sur u_0
- Supposons P_n vraie alors $u_n + 2 > 3$ et $u_n + 1 > 2$ donc $u_n(u_n+1)(u_n+2) > 6$ donc $u_{n+1} > 1$ donc P_{n+1} est vérifié.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictements positifs, et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{6}(u_n+1)(u_n+2)$$

Comme $u_n(u_n+1)(u_n+2) > 6$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4. On trace la droite déquation $y = x$, une seule des trois courbes intersecte cette droite aux points d'abcisses -4, 0 et 1 qui sont les équilibres de la relation de récurrence (*c.f.* question 1).

5. On obtient $u_0 = -3$, $u_1 = -1$ et $u_2 = 0$.