

Interrogation du 7/03/2003

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto-verso. Vous devez rendre ce sujet avec votre copie.

Exercice I (6 points)

On considère une fonction g de classe C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont la dérivée ne s'annule pas sur $I = [a, b]$. On suppose que g a une unique racine α dans I et on considère la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \quad (1)$$

1. Déterminer le ou les équilibres de (1) appartenant à I
2. Donner une condition suffisante pour que ce (ou ces) équilibres soient stables ?
3. Construire une suite qui converge vers α .
4. Décrire un algorithme, se basant sur cette suite, permettant de trouver une valeur approchée de α à $\varepsilon > 0$ près.

Exercice II (4 points)

Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \end{cases}$$

Exercice III (4 points)

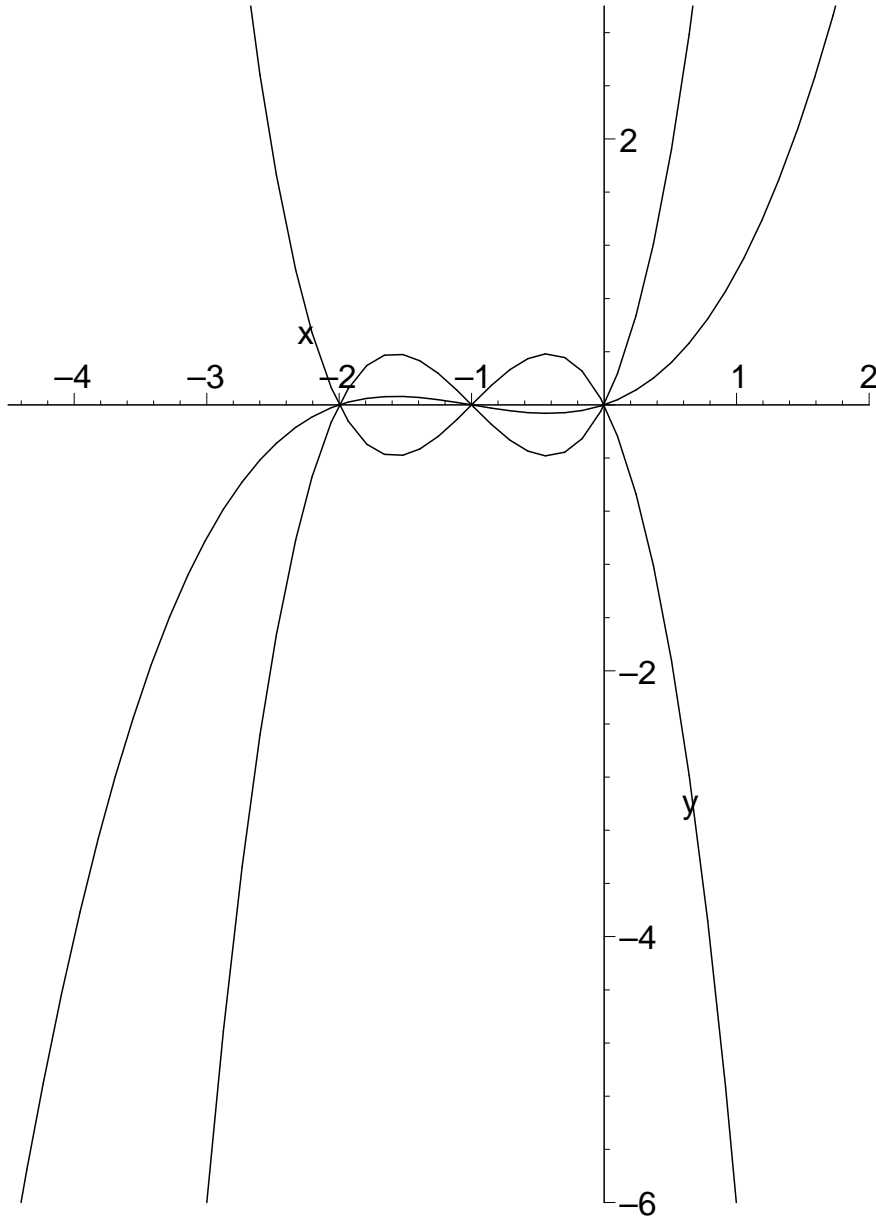
Soit $E = [1, 2[\cup]3, 4[\cup]4, 5[$.

1. L'ensemble E est-il un voisinage de 1 ?
2. L'ensemble E est-il un voisinage de 4 ?
3. L'ensemble E est-il un ouvert ?
4. L'ensemble $E \setminus \{1\}$ est-il un ouvert ?

Exercice IV (6 points)

On considère la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n(u_n + 1)(u_n + 2)$

1. Quels sont le ou les équilibres de cette relation ?
2. Etudier chaque équilibre et dites s'il est stable ou non.
3. Montrer que si $u_0 > 1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. Trois graphes de fonctions sont représentés ci-dessous. L'un d'entre est celui de la fonction $x \mapsto \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$. Déduire de quel graphe il s'agit, en utilisant l'une des questions précédentes.



5. Déterminer graphiquement les 3 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ issue de $u_0 = -3$. Utilisez le graphe-ci dessus et rendez ce sujet avec votre copie.