Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Interrogation du 10/12/2002

Corrigé

Exercice I

1. On a
$$u_n = \sqrt{n}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
Or $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$ et $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim u_n = 1$.

2. On a
$$u_n = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$$
donc $\lim u_n = +\infty$.

Exercice II

Considérons $\varepsilon > 0$. Posons $N = \mathrm{E}(\frac{6}{\varepsilon}) + 1$.
$$n > N \Rightarrow n > \frac{6}{\varepsilon}$$
donc
$$n > N \Rightarrow \frac{1}{6n} < \varepsilon$$
donc
$$n > N \Rightarrow \left|\frac{(-1)^{3n}}{6n}\right| < \varepsilon$$
donc
$$n > N \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$$
Ainsi
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$$
donc $\lim u_n = 2$.

Exercice III

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim u_n = l$, il existe un rang N_1 tel que $n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. En outre, comme $\lim v_n = l'$, il existe un rang N_2 tel que $n > N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, lorsque $n > N$ on a
$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
Ainsi $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$ donc $\lim(u_n + v_n) = l + l'$.

Exercice IV

On a

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$ il vient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{n}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

ainsi

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$