Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2002-2003
Semestre 2

Examen du 22/04/2003

corrigé

Exercice I

1. Soit $x \in \overline{E}$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E telle que $x = \lim u_n$. Il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = \frac{1}{p} + \frac{1}{q^2}$ donc $0 < u_n \leq 2$ donc $0 \leq \lim u_n \leq 2$ ainsi $x \in [0;2]$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, considérons p et q entiers tels que $p > \frac{2}{\varepsilon}$ et $q > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q^2} < \varepsilon$. Par suite $]-\varepsilon, \varepsilon[\cap (E \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ donc 0 est point d'accumulation de E.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q^2} < \varepsilon$ (par exemple $q = \mathrm{E}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) + 1$). Ainsi $f(n,q) \in]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon[$ donc $E \cap]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon[\setminus \{\frac{1}{n}\} \neq \emptyset$ donc $\frac{1}{n}$ est point d'accumulation de E.

4. L'ensemble E n'est pas fermé puisque la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ converge vers $0 \notin E$ alors que (u_n) est une suite d'éléments de E. Ce n'est pas un compact puisque ce n'est pas un fermé.

Exercice II

1. Soit $x \in \overline{A \cap B}$ alors il existe une suite (u_n) d'éléments de $A \cap B$ dont la limite est x. La suite (u_n) est à éléments dans A donc $x \in \overline{A}$ et c'est une suite d'éléments de B donc $x \in \overline{B}$. Par suite $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. On en déduit que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Il existe d'autre méthodes, par exemple : on a $A \cap B \subset A$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$. De même $A \cap B \subset B$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$. Par suite $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. L'inclusion réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant.

$$\begin{aligned} A &=]-\infty, 0[\\ B &=]0, +\infty[\end{aligned}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \not\subset \emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A \cap B}$$

Exercice III

1. L'adherence de E est $\overline{E} =]-\infty, 2] \cup \{4\} \cup [5,6]$ en effet 0 et les irrationnels de $[5,6]$ sont dans l'adherence puisqu'il existe des suites d'éléments de E convergent vers ces éléments. En outre $]-\infty, 2] \cup \{4\} \cup [5,6]$ est un fermé. C'est donc le plus petit fermé contenant E.

L'interieur de E est $\overset{\circ}{E} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[$ puisque 2 et 4 n'ont pas E comme voisinage, de même pour les rationnels de $[5,6]$. Comme $]-\infty, 0[\cup]0, 2[$ est ouvert, c'est le plus grand ouvert inclus dans E.

La frontière de E est alors $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \{0;2;4\} \cup [5,6]$.

Seul 4 est point isolé donc $E^* = \{4\}$ par suite $E' = \overline{E} \setminus E^* =]-\infty, 2] \cup [5,6]$.

2. L'ensemble E n'est pas ouvert puisque $E \neq \overset{\circ}{E}$. Ce n'est pas un fermé puisque $E \neq \overline{E}$.

3. Comme E n'est pas fermé il n'est pas compact. En revanche, $E \cap [1,5[= [1,2] \cup \{4\}$ est un fermé borné. Donc c'est un compact.

Exercice IV

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}x$. Le réel a est un équilibre de la relation de recurrence si et seulement si $a = f(a)$ ce qui équivaut à $a^2 - \frac{3}{4}a = 0$ ce qui équivaut à $a(a - \frac{3}{4}) = 0$ ce qui équivaut à $a = 0$ ou $a = \frac{3}{4}$.

La fonction f est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = 2x + \frac{1}{4}$ ainsi $|f(0)| = |\frac{1}{4}| < 1$ donc 0 est un équilibre stable. Ainsi il existe un réel $r > 0$ tel que $u_0 \in]-r, r[$ entraine la convergence vers 0 de la suite issue de la condition initiale u_0.

2. Si $r \geq \frac{3}{4}$ alors la suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{3}{4}$ doit converger vers 0, or ce n'est pas le cas puisque $\frac{3}{4}$ est un équilibre (et donc $u_0 = \frac{3}{4}$ entraine $\lim u_n = \frac{3}{4}$).

3. Comme $]0, r[\subset]-r, r[$ on sait déjà que $\lim u_n = 0$. Montrons que $u_n > 0$ par récurrence. Soit P_n cette proposition.

- P_0 est vraie par hypothèse
- Supposons P_n vraie alors $u_n > 0$ donc $\frac{1}{4}u_n > 0$ donc $u_n^2 + \frac{1}{4}u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$ donc P_{n+1} est vérifiée.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, la question précédente donne $-u_n < 0 < u_n$ donc $\{0\} \subset A$.
Supposons qu'il existe $a \neq 0$ in A. Soit $\varepsilon = |a| > 0$, comme $\lim u_n = 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ entraine $|u_n| < \varepsilon$ ainsi $a \notin]-u_n, u_n[$ donc $a \notin A$. Contradiction.
Ainsi $A = \{0\}$.