Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I | Semestre 2

Examen du 22/04/2003

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto-verso.

Exercice I (5 points)

Soit f l'application définie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(p,q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q^2}$$

et $E = \operatorname{Im} f$.

1. Montrer que $\overline{E} \subset [0;2]$

2. Montrer que 0 est point d'accumulation de E.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{1}{n}$ est point d'accumulation de E.

4. L'ensemble E est-il fermé ? Est-ce un compact ?

Exercice II (4 points)

Soit A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$.

1. A-t'on $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Redémontrez ce résultat, ou donnez un contre-exemple.

2. A-t'on $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Redémontrez ce résultat, ou donnez un contre-exemple.

Exercice III (5 points)

Soit $E =]-\infty, 0[\cup]0, 2] \cup \{4\} \cup ([5,6] \cap \mathbb{Q})$

1. Determiner $\overline{E}$, $\overset{\circ}{E}$, ∂E, E' et E^*.

2. E est-il ouvert ? E est-il fermé ?

3. E est-il compact ? $E \cap [1,5[$ est-il compact ?

Exercice IV (6 points)

On considère la recurrence suivante $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4}u_n$.

1. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $u_0 \in]-r, r[\Rightarrow \lim u_n = 0$.

2. Montrer que $r < \frac{3}{4}$.

3. Soit $u_0 \in]0, r[$, montrer que $u_n > 0$ et $\lim u_n = 0$.

4. Soit $A = \cap_{n=0}^{+\infty}]-u_n, u_n[$. Montrer que $A = \{0\}$.