

## Examen du 29/01/2003

Corrigé

### Exercice I

Notons  $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  et

$$S = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Étudions d'abord le cas  $\alpha < 1$ . Choisissons  $a > 0$  de sorte que  $\alpha + a$  soit encore strictement inférieur à 1, par exemple  $a = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^a} = 0 \quad (1)$$

Cela est clair si  $\beta \leq 0$  (ce n'est pas une forme indéterminée) et si  $\beta > 0$ , c'est une conséquence de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^\gamma} = 0$  avec  $\gamma = \frac{a}{\beta} > 0$ . Ainsi (1) donne

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{(\ln n)^\beta}{n^a} \right| < \epsilon$$

En particulier pour  $\epsilon = 1$ , il existe un entier  $n_0$  à partir duquel

$$(\ln n)^\beta \leq n^a$$

donc

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n^{\alpha+a}}$$

En conséquence

- $u_n \geq \frac{1}{n^{\alpha+a}}$  pour  $n \geq n_0$
- $(u_n)$  est à termes positifs pour  $n \geq n_0$
- $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^{\alpha+a}}$  diverge puisque c'est une série de Riemann avec  $\alpha + a < 1$

par le théorème de comparaison  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est divergente. Comme la nature d'une série n'est pas affectée par ses premiers termes,  $S$  diverge.

Étudions à présent le cas  $\alpha > 1$ . On peut choisir  $a > 0$  de sorte que  $\alpha - a > 1$ , par exemple  $a = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$ . On démontre de manière analogue au cas précédent que

$$(\ln n)^\beta \geq n^{-a}$$

à partir d'un rang  $n_0$ . Donc

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^{\alpha-a}}$$

En conséquence

- $u_n \leq \frac{1}{n^{\alpha-a}}$  pour  $n \geq n_0$

- $(u_n)$  est à termes positifs pour  $n \geq n_0$
- $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^{\alpha-a}}$  converge puisque c'est une série de Riemann avec  $\alpha - a > 1$

par le théorème de comparaison  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est divergente. Comme la nature d'une série n'est pas affectée par ses premiers termes,  $S$  converge.

## Exercice II

Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Posons  $N = E(\exp(\exp(A))) + 1$  alors

$$n \geq N \Rightarrow n \geq \exp(\exp(A))$$

or  $\ln \circ \ln$  est croissante donc

$$n \geq N \Rightarrow \ln(\ln(n)) \geq A$$

ainsi  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq A \Rightarrow u_n \geq A$  donc  $\lim u_n = +\infty$ .

## Exercice III

Posons  $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ , on a

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{u_n} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln(1-0)}{\frac{1}{n} - 0}\right) \end{aligned}$$

Posons  $f(x) = \ln(1-x)$  on a  $f'(x) = \frac{-1}{1-x}$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln(1-0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -1$$

Ainsi  $\lim \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e} < 1$ . La suite  $(u_n)$  est à termes positifs, le critère de Cauchy permet de conclure que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

## Exercice IV

1. Soit  $(P_n)$  l'hypothèse de récurrence

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- $(P_1)$  est vraie puisque  $1 = \frac{1 \times 4}{4}$
- Supposons  $(P_n)$  vraie alors

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

donc

$$(n+1)^3 + \sum_{i=1}^n i^3 = (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n^2 + 4n + 4)(n + 1)^2}{4}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n + 1)^2(n + (n + 1))^2}{4}$$

donc  $(P_{n+1})$  est vraie

Par suite  $(P_n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq 1$ .

2. On note que  $i$  et  $j$  sont des variables muettes donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{j=1}^n j^3 - \sum_{j=1}^n \cos(j) + \sum_{i=0}^n \cos(i) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \sum_{i=1}^n \cos(i) + \cos(0) + \sum_{i=1}^n \cos(i) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 1 \end{aligned}$$

3. Soit  $v_n = \frac{(-1)^n u_n}{n^5}$ , la question précédente donne

$$v_n = (-1)^n \frac{n^2(n+1)^2 + 4}{4n^5}$$

Posons  $a_n = (-1)^n$  et  $b_n = \frac{n^2(n+1)^2 + 4}{4n^5}$ .

i) La suite  $(b_n)$  est à termes positifs

ii) On a  $b_n = \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n}) + \frac{4}{n^5}$ . Le premier terme de cette suite est une suite décroissante car produit de deux suites décroissantes positives, le second terme de cette suite est également une suite décroissante, ainsi  $(b_n)$  est décroissante.

iii) On a  $\lim b_n = 0$

iv) Soit  $p$  et  $q$  deux entiers non nuls avec  $q > p$  alors  $\sum_{i=p}^q a_i \in \{-1; 0; 1\}$  donc  $|\sum_{i=p}^q a_i| \leq 1$ .

Le théorème d'Abel permet de conclure que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_n}{n^5}$  est convergente.

En revanche  $|v_n| \sim \frac{1}{n}$ , ces suites sont positives et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge donc le théorème de comparaison permet de conclure que  $\sum_{n \geq 1} |v_n|$  diverge. Ainsi  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_n}{n^5}$  n'est pas absolument convergente.