Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Examen du 29/01/2003

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (6 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Discuter, selon α, la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Exercice II (4 points)

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = \ln(\ln n)$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim u_n = +\infty$

Exercice III (4 points)

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Exercice IV (6 points)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. Simplifier le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} (j^3 - \cos(j)) + \sum_{i=0}^{n} \cos(i)$$

3. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_n}{n^5}$ est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?