Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2002-2003
CS 103 – Analyse I | Semestre 2

Devoir 4

Correction

Exercice I

1. Soit $x \in \overline{E}$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E telle que $x = \lim u_n$. Il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = \frac{1}{p} + \frac{1}{q^2}$ donc $0 < u_n \leq 2$ donc $0 \leq \lim u_n \leq 2$ ainsi $x \in [0;2]$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, considérons p et q entiers tels que $p > \frac{2}{\varepsilon}$ et $q > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q^2} < \varepsilon$. Par suite $]-\varepsilon, \varepsilon[\cap (E \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ donc 0 est point d'accumulation de E.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q^2} < \varepsilon$ (par exemple $q = \mathrm{E}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) + 1$). Ainsi $f(n,q) \in]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon[$ donc $E \cap]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon[\setminus \{\frac{1}{n}\} \neq \emptyset$ donc $\frac{1}{n}$ est point d'accumulation de E.

Exercice II

1. Soit $x \in E$. Comme $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = (p,q)$.

2. Si $p > n$ et $q > \sqrt{n(n+1)}$ alors $p \geq n+1$ et $q^2 > n(n+1)$ alors $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{q^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ alors $f(p,q) < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ or $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc $f(p,q) < \frac{1}{n}$. Nous avons établit

$$p > n \text{ et } q > \sqrt{n(n+1)} \implies f(p,q) \leq \frac{1}{n}$$

la contraposée dit que $f(p,q) \geq \frac{1}{n}$ entraine $p \leq n$ ou $q \leq \sqrt{n(n+1)}$.

3. Soit $y \in E \cap]x, 2]$. Soit m tel que $1 < 1 + \frac{1}{m} < x$ (un tel m existe, il suffit de prendre $m = \mathrm{E}(\frac{1}{x-1}) + 1$). Considérons $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $y = f(p,q)$. Comme $y \geq 1$, la question précédente permet d'affirmer que $p \leq 1$ ou $q \leq \sqrt{2}$. Dans le premier cas $p = 1$, dans le second $q = 1$.

- Supposons $p = 1$ alors $1 + \frac{1}{m} < 1 + \frac{1}{q^2} \leq 2$ donc $\frac{1}{m} < \frac{1}{q^2} \leq 1$ ainsi $q \leq \mathrm{E}(\sqrt{m}) + 1$.
- Supposons $q = 1$ alors $1 + \frac{1}{m} < 1 + \frac{1}{p} \leq 2$ donc $\frac{1}{m} < \frac{1}{p} \leq 1$ ainsi $p \leq m + 1$.

Dans les deux cas il existe un nombre fini de couples (p,q) tels que $f(p,q) \in]x, 2]$ donc $E \cap]x, 2]$ est un ensemble fini.

4. Soit $y \in E \cap]x, \frac{1}{n-1}[$. Soit m tel que $\frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < x$ (un tel m existe, il suffit de prendre $m = \mathrm{E}(\frac{1}{x - \frac{1}{n}}) + 1$). Considérons $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $y = f(p,q)$. Comme $y \geq \frac{1}{n}$, la question 2 permet d'affirmer que $p \leq n$ ou $q \leq \sqrt{n(n+1)}$.

- Supposons $p \leq n$ alors $p = n$ en effet $p \leq n-1$ entrainerait $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{n-1}$ et donc $y > \frac{1}{n-1}$. Par suite $y = \frac{1}{n} + \frac{1}{q^2}$ donc $\frac{1}{m} < \frac{1}{q^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ainsi $q \leq \mathrm{E}(\sqrt{m}) + 1$. Dans ce cas il existe un nombre fini de couples (p,q) tels que $f(p,q) \in]x, \frac{1}{n-1}[$.

- Supposons $q \leq \sqrt{n(n+1)}$.
  Remarquons que $\frac{1}{q^2} < \frac{1}{n-1}$ sinon $y > \frac{1}{n-1}$. Ainsi $q^2 \geq n-1$ donc $q^2 \geq n$ et par suite $\frac{1}{n} - \frac{1}{q^2} \geq 0$. Il en résulte
  $$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{q^2} \tag{1}$$
  D'autre part nous avons $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q^2}$ donc $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{q^2} \leq \frac{1}{p}$, en utilisant (1) il vient $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{p}$ donc $p \leq m$. En conséquence, il existe un nombre fini de couples (p, q) tels que $f(p, q) \in]x, \frac{1}{n-1}[$.

Dans les deux cas il existe un nombre fini de couples (p, q) tels que $f(p, q) \in]x, \frac{1}{n-1}[$ donc un nombre fini d'éléments dans $E \cap]x, \frac{1}{n-1}[$.

Exercice III

1. Posons $N = n+1$ on a alors $N \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit $y \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[=]\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}[$. Posons $\alpha = \min\{|y - \frac{1}{N}|, |y - \frac{1}{N-1}|\}$ et $x = y - \frac{1}{N}$, il vient $]y - \alpha, y + \alpha[\cap E \subset E \cap [x, \frac{1}{N-1}[$. La quesiton 4 de l'exercice précédent permet d'affirmer que cet ensemble est fini. Il existe donc un élément z qui est le plus proche de y. Soit $\varepsilon = |y - z|$, il vient $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\cap E = \emptyset$ donc y n'est pas un point d'accumulation de E. Par suite $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ ne contient aucun point d'accumulation de E.

2. L'intervalle $]1, 2]$ ne contient aucun point d'accumulation de E par une démonstration analogue à la précédente (dans laquelle on utilise la question 3 et non la question 4 de l'exercice II). Ainsi

$$\mathbb{R} \setminus E' \subset]-\infty, 0[\cup \left(\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\right) \cup]1 + \infty[$$

et

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset E'$$

donc

$$\overline{E} = E \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$